

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [略解](#)

ベクトル解析

樋口さぶろお¹ 配布: 2009-06-01 Mon 更新: Time-stamp: "2009-11-07 Sat 15:27 JST hig"

5 略解 — ベクトル場の線積分マーク1を計算しよう!

1. 始点が $(0, 0) = \mathbf{r}(0)$ 終点が $(-8, 2) = \mathbf{r}(2)$ なので

$$\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt = \int_0^2 (3(t)^2, 2(-t^3)) \cdot (-3t^2, 1) dt = \int_0^2 (-9t^4 - 2t^3) dt = -\frac{328}{5}.$$

2. 始点が $(-4, -12) = \mathbf{r}(-2)$ 終点が $(0, 0) = \mathbf{r}(0)$ なので

$$\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-2}^0 \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt = \int_{-2}^0 (-(2t)+2(-3t^2), 3(2t)+4(-3t^2)) \cdot (2, -6t) dt = \dots = -408.$$

6 スカラー場の勾配を求めよう!

今日の目標

- スカラー場が与えられたときに, 勾配ベクトル場が求められるようになるう!
- 勾配ベクトル場の線積分マーク1を楽にできるようになるう!
- ベクトル場が与えられたときに, 保存的かどうか (= 渦なし条件を満たすかどうか = 実は勾配ベクトル場であるかどうか) を判定できるようになるう!

quiz

1. スカラー場 $f(\mathbf{r}) = xy^4$ に対して勾配ベクトル場 ∇f を求めよう.
2. 上の問で求めた勾配ベクトル場の, 曲線 $C: \mathbf{r}(t) = (-2, 1)t + (3, 1)$, $(0 \leq t \leq 1)$ に沿った線積分 (マーク1) を楽に求めよう. ただし, $(3, 1)$ を始点, $(1, 2)$ を終点とする.
3. ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (y, -x)$ に対して $(\nabla \times \mathbf{V})_z$ を計算して渦なし条件を満たすかどうか調べて, \mathbf{V} が保存場かどうか判定しよう.

¹Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

4. スカラー場 $f(\mathbf{r}) = x^2 + 4y^2$ に対して, f の等高線を描こう. 重ねて勾配ベクトル場 $\mathbf{V} = \nabla f$ を描こう.
5. 保存場 (渦なし条件を満たすベクトル場) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (2xy^2 + 5x^4, 2x^2y + 4y)$ に対してベクトル場の線積分マーク 1 を求めよう. ただし, 積分経路は始点が $(2, 0)$, 終点が $(0, 2)$ で図の通り.

Hint やりかた 1) 保存場だから, $\nabla f = \mathbf{V}$ となる f があるはず. やまかんで求めよう.

Hint やりかた 2) 保存場だから, 始点終点を保ったままなら, 自分の好きなように曲線 (積分経路) C を変更して計算してもよい. たとえば, x 軸上を通過して原点で曲がって y 軸上を進む積分経路なんてどうかな.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 問題 6.30(p.143), 問題 6.32(p.143), 問題 6.34(p.144), 問題 6.37(p.146).
章末問題 [6.5](p.149).

スカラー場 f の等高線とベクトル場 ∇f

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.123, 図 6.5 より引用

pdf バージョンでは図は省略

プチテストやります!

全学休講でスライドして, 6月15日(月). 科目の成績 100点中 30点分. 60分. 持ち込みなし. 現時点での出題計画 (来週の授業までに最終的に決めます) は

- 関数の曲線に沿った線積分 (マーク 0) を計算しよう (曲線の長さも含む)
- ベクトル場の曲線に沿った線積分 (マーク 1) を計算しよう (保存的かもしれないし保存的でないかも)
- 風とアデリーペンギンについての問題.
- 勾配ベクトル場を求めよう (量的には少ない)
- スカラーポテンシャルを求めよう (6月7日にやる予定)

模範解答を作ろう!プロジェクト

ReLS <https://r-els.media.ryukoku.ac.jp> → [ベクトル解析](#)

→ [模範解答を作ろう!プロジェクト](#)

に投稿されている問題に対して、模範解答を紙に作成して、スキャンしたものの(後述)をフォーラムに返信してください。最初の解答が完璧でなかった場合、投稿した人、または他の人が修正したものを再投稿することができます。

最終的な完璧な答案を投稿した人よりも、各難関ポイントを解決して貢献した人を評価して点数を決定します。何人かの貢献で1問の最終的な答案が完成したら、10点がその人々に分配されます。

また、独立に作成した投稿でも、同じ内容なら、一番最初に投稿した人のみを評価します。

一人に人がこのプロジェクトで得られる最大の点数は10点です。

多くの人に参加のチャンスがあるように、問題はときどき追加します。フォーラムの右側ブロックで、'このフォーラムをメール購読する'を選択すると、問題が公開されたときにメールで通知を受けることができます。

スキャンは、自宅にスキャナがあればそれを使ってくれてもいいし、3号館地下第2セルフラーニング室や理工学部実習室 1-612 で簡単にスキャンできます。

<http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php> http://hig3.net



<http://hig3.net>