

# スカラー場の線積分とベクトル場

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析▽ L04(2011-05-11 Wed)

更新:Time-stamp: "2011-05-11 Wed 11:36 JST hig"

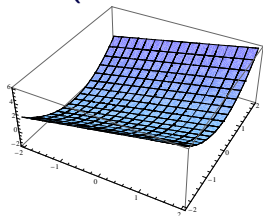
## 今日の目標

- ① スカラー場の曲線上の線積分が計算できる
- ② ベクトル場が描ける
- ③ 風がペンギンのどちら側の羽にあたるか答えられる



<http://hig3.net>

## 略解 (スカラー場の3次元グラフ)



略解 (スカラー場と位置ベクトル)  $f(\mathbf{r}(t)) = f(2t^2, -3t) =$   
 $3 \cdot 2t^2 + (-3t)^2 - 4(-3t) - 20 = 15t^2 + 12t - 20 = 15\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{12}{5} - 20.$   
 よって  $t = \frac{2}{5}$  に最小値  $-\frac{112}{5}$  をとる. このときのペンギンの位置ベクトル  
 は  $\mathbf{r}\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{8}{25}, -\frac{6}{5}\right).$

## スカラー場の曲線上の線積分

スカラー場  $f(\mathbf{r})$  と、パラメタ表示  $\mathbf{r}(t)$  ( $T_0 \leq t \leq T_1$ ) を持つ曲線  $C$  に対して、

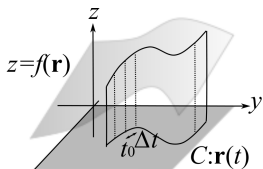
$$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_{T_0}^{T_1} f(\mathbf{r}(t)) \cdot \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt$$

を、**スカラー場  $f$  の曲線  $C$  上の線積分** という。 小高のってない

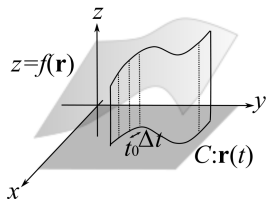
$ds$  の  $s$  は線積分専用文字

スカラー場の線積分の意味

底が平面  $z = 0$ , 表面が曲面  $z = f(\mathbf{r})$  であるようなケーキを、曲線  $C$  に沿って切ったときの切り口の面積。なぜ?



- 面積は短冊 (長方形) の面積の合計
- 短冊 1 枚の  は  $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) \right| \cdot \Delta t$ .
- 短冊 1 枚の  は  $f(\mathbf{r}(t_0))$ .



$$\text{切り口の面積} = \sum f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) \right| \cdot \Delta t \rightsquigarrow \int_{T_0}^{T_1} f(\mathbf{r}(t)) \cdot \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt$$

例  $f(\mathbf{r}) = 1$  のとき,

$$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_{T_0}^{T_1} 1 \cdot \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \text{曲線の長さ } L(\text{前々回})$$

$f(\mathbf{r}) = h$  (定数) なら, 面積 =  $h \times L =$  丸めた長方形の紙の面積

**比較** 面積分 (2重積分)  $\int_S f(\mathbf{r}) \, dx dy$  は領域  $S$   .

**解釈**  $f(\mathbf{r})$  を  $\mathbf{r}$  の真上のケーキの厚さでなく、重さと思うと、線積分は曲線上のケーキの重さの合計.

### 問題 (スカラー場の線積分)

$z = 0$  と曲面  $f(\mathbf{r}) = 10 - |\mathbf{r}|^2$  にはさまれる立体の、曲線  $C$ ,  $\mathbf{r}(t) = (t, -2t)$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) に沿った切り口の面積を求めよう.

## 問題 (スカラー場の線積分とケーキの切り口)

スカラー場  $f$  は  $f(\mathbf{r}) = y$  で定義される. 曲線  $C$  は  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos 2t, 2 \sin 2t)$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ) とパラメタ表示される.

- ① 曲線  $C$  の長さを求めよう.
- ② 底が  $z = 0$ , 上の面が  $z = f(\mathbf{r})$  で与えられるケーキがあるとき, 曲線  $C$  に沿ってケーキを切ったときの切り口の面積を求めよう.

## ベクトル場=(2変数関数が2個)

## ベクトル場

スカラー場2個の組  $(V_1(x, y), V_2(x, y))$  のことを **ベクトル場** ともいう。  
 値がベクトル  $(V_1, V_2)$  であるような2変数関数と思ってもよい。

$(V_1, V_2) = \mathbf{V}, (x, y) = \mathbf{r}$  という記号で  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$  のように書く。 **小高 §2.1(p.39)**

## 比較

- 曲面を表すスカラー場  $f(x, y)$  は2個の数を1個の数に。  $(x, y) \mapsto z$
- 曲線を表す(パラメタ表示で)ベクトル値関数 **小高 §2.5**  $\mathbf{r}(t)$  は1個の数を2個の数に。  $t \mapsto (x, y)$ .
- を表すベクトル場  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  は2個の数を2個の数に。  
 $(x, y) \mapsto (V_1, V_2)$ .

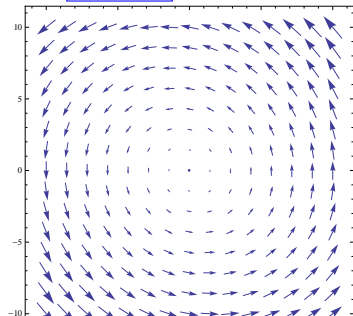
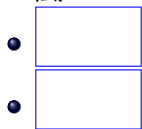
## ベクトル場の直観的意味

$\mathbf{r} = (x, y)$ : 平面上の位置.

$\mathbf{r}(t)$ : 時刻  $t$  にアデリーペンギンのいる位置. 位置ベクトル.

$f(\mathbf{r})$ ; 位置  $\mathbf{r}$  での

● 風





## ベクトル場の図の描き方

例  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (x - y, x^2)$ .

## 問題 (ベクトル場を描こう)

- ① ベクトル場  $\mathbf{V}(x, y) = (-y + 1, x + y)$  の,  
 $(x, y) = (0, 1), (2, 3), (0, 4), (-5, 6)$  における値を求めよう.
- ② ベクトル場  $\mathbf{V}(x, y) = (0, 2x)$  のグラフを描こう.
- ③ ベクトル場  $\mathbf{V}(x, y) = -(x + y), 0$  のグラフを描こう.
- ④ ベクトル場  $\mathbf{V}(x, y) = -(x + y), 2x$  のグラフを描こう.
- ⑤ ベクトル場  $\mathbf{V}(x, y) = (y + 2, 1)$  のグラフを描こう.



## ベクトル場と曲線

位置  $\mathbf{r}$  の風を  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (2x + 3y, x^2 - 3y^2)$ .

アデリーペンギンの位置ベクトルを  $\mathbf{r}(t) = (t, 2t)$  とする.

アデリーペンギンが時刻  $t$  に感じる風は

## 問題 (吹雪の中のペンギン)

風は時間によらず一定で、位置  $\mathbf{r} = (x, y)$  の風は、ベクトル場  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (2y^2 - 1, 2xy)$  で与えられる。また、このエリアを直立2本足歩行するジェンツーペンギンの、時刻  $t$  での位置は  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$  ( $-\frac{3}{4}\pi \leq t \leq +\frac{3}{4}$ ) で与えられる

- ① 時刻  $t$  のジェンツーペンギンが感じる風を表すベクトルを求めよう。
- ② 時刻  $t$  のジェンツーペンギンのくちばしの向きのベクトルを求めよう。
- ③ ジェンツーペンギンの正面から風が吹いてくる時刻を求めよう。
- ④ ジェンツーペンギンの真横から風が吹いてくる時刻を求めよう。この時刻に、風はアデリーペンギンのくちばしの右側にあたるか左側にあたるか答えよう。



## 連絡

### 大事な連絡

- 前回の Quiz は 6 点  $\times 2$ .
- 予習復習問題は通常モードに戻ります.
- プチテストの日程を訂正. 2011-06-15~~08~~ 水 1 を予定.
- 前土 2 の教師論は今年とろう! 時間割上は見えないけど来年にひびく.
- 数検をとろう! 申込は来週月まで.

### 教科書のお奨め問題

- 曲線の長さ 小高 問題 3.2-4, 章末問題 [3.3],[3.4]
- ベクトル場 小高 問題 2.5-6, 章末問題 [2.2]