テスト実施報告

Time-stamp: "2011-03-17 Thu 08:36 JST hig"

樋口三郎

基本情報

科目 数値計算法 (理工学部数理情報学科 2 年次コア必修科目 MPI) `http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/nc_2010/`

実施日 2010-07-30(金) 1 講時

受験者 93 名

持込 外部記憶ペーパー A4 両面 (作成 10 分)

出題予告 1,2 週間前の, 13,14 回目の授業で次のように出題予告を行った. これらのうちいくつかは, 授業内で行った quiz に対応している.

- 台形公式で数値積分しよう!
- シンプソン公式で数値積分しよう!
- データの平均, 分散, 標準偏差を求めよう!
- 2 変量データの相関係数を求めよう!
- 2 分法で非線形方程式を解こう!
- 連立 1 次方程式を Gauss-Jordan の消去法 (計算機用) で解こう!
- 行列やベクトルを成分で計算するプログラムを書こう!
- ニュートン法や反復法のプログラムを書こう!(プチテスト範囲再出題)
- 漸化式で定義される数列 a_k について $\sum_{k=0}^{n} a_k$ を求めるプログラムを書こう!(プチテスト範囲再出題)
- プログラムを読んで, その出力を予想しよう.

出題上の配慮点 次のような配慮を行った.

- できるだけ互いに独立な小問とする.
- 個々の小問を, 各回の授業のゴールと対応させ, 科目 (の後半) 全体をカバーする
- できるだけ毎回の quiz と近い設問とする.

数値計算法☆演習ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-07-30 Thu 更新: Time-stamp: "2011-03-17 Thu 08:36 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 外部記憶ペーパー作成 10 分, 答案作成 80 分.
2. 要過程 の問は過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

要過程 定積分

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

の近似値を, 分割数 $N = 4$ の台形公式による数値積分で求めよう.

2

要過程 定積分

$$\int_1^5 x \cdot 2^x\,\mathrm{d}x$$

の近似値を, 分割数 $2N = 4$ のシンプソン公式による数値積分で求めよう.

3

次の 5 個のデータの平均, 分散, 標準偏差を求めよう. (他の統計の授業もうけている人への注意: 分散とは, 標本分散, 不偏分散などとも言われるものです. 標準偏差も同様.)

$$-2, +5, -10, 0, +2.$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

$\boxed{\text{要過程}}$ 次の 2 変量データの相関係数を求めよう.

x	5	9	7	1	3
y	10	6	2	-2	-6

5

方程式 $\cos x = 0$ の数値解を 2 分法で求めることを考える.

1. 区間 $(0, 8)$ に含まれる真の解をすべて求めよう.
2. 初期区間を $(a_0, b_0) = (0, 8)$ とするとき, (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ を求めよう.
3. 初期区間を $(a_0, b_0) = (0, 8)$ とするとき, 最終的に求まる数値解 x を答えよう.

6

$\boxed{\text{要過程}}$ 次の連立 1 次方程式を, 前進消去だけからなる Gauss-Jordan の消去法 (計算機用) で解くときの拡大係数行列の変形の過程を書こう. 変形の名前や理由は書かなくていいが, 人間用のアルゴリズムとの違いがわかる程度に詳しく書こう. また, 選んだピボットを丸で囲んで示そう.

$$\begin{aligned} y + z &= 2 \\ 2x + 4y + 2z &= 6 \\ x + 4y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

続きます

7

A を 5×5 行列とする．次のプログラム内で，関数 f は，任意の 5 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ を引数として与えられたとき，ベクトルの絶対値 (長さ) $|\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v}|$ を計算して返すものである (d に絶対値が代入される)．f を適切に定義しよう．

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double f(double v[]);

int n=5;
double A[][5]={{1.0,2.0,3.0,2.0,4.0},
               {3.0,8.0,3.0,8.0,4.0},
               {1.0,2.0,6.0,2.0,4.0},
               {9.0,8.0,3.0,8.0,6.0},
               {1.0,2.0,4.0,2.0,4.0}};

int main(void){
  double d;
  double v[]={1.0,2.0,3.0,2.0,3.0};

  d=f(v);
  printf("%f\n",d);
  return;
}

double f(double v[]){
  /* ここをうめてね(ここだけ答えればいい) */
}
```

8

方程式

$$e^x = \log x + 3$$

の解を，Newton 法で数値的に求めるプログラムを書こう．

Newton 法の定める数列を $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ とするとき，初期値は $x_0 = 1$ ととろう．誤差 $|x_n - x_{n-1}|$ が 10^{-6} より小さくなったら x_n を出力して終了するようにしよう．収束性や解の存在や個数などは気にしなくてよい．

9

次の漸化式で定まる数列 $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ を考える．

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = 2\cos(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

正の整数 n を入力すると，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ を計算して出力するプログラムを書こう．数値計算誤差のことは気にしなくてよい．

10

次のプログラムに正の整数 n を入力した時の出力を, n の関数として答えよう. (もちろん出力は double の数値だが, ふつうの数式を答える)

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(void){
  double x;
  int i,n;

  scanf("%d",&n);

  x=0.0;
  for(i=0;i<=n;i++){
    x=x+3.0*pow(0.5,i);
  }
  printf("%f\n",x);
  return;
}
```

数値計算法☆演習ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2010-07-30 Thu 更新: Time-stamp: ”2011-03-17 Thu 08:36 JST hig”

配点　10 点 ×10 問.

1

刻み幅は $h=\frac{1}{6}\pi$. $f(x)=(\sin x)^{-4}$ とすると,

$$
\begin{aligned}
&h\times[\tfrac{1}{2}f(\tfrac{1}{6}\pi)+f(\tfrac{2}{6}\pi)+f(\tfrac{3}{6}\pi)+f(\tfrac{4}{6}\pi)+\tfrac{1}{2}f(\tfrac{5}{6}\pi)]\\
=&\tfrac{1}{6}\pi\times(\tfrac{1}{2}\cdot 2^2+\tfrac{2^2}{3}+1+\tfrac{2^2}{3}+\tfrac{1}{2}\cdot 2^2)=\tfrac{(6+4+3+4+6)\pi}{18}=\tfrac{23\pi}{18}=4.01426\cdots.
\end{aligned}
$$

Remark　真の値は $2\sqrt{3}$. $f(x)=f(\frac{\pi}{2}-x)$ という対称性を使うと, 分割数 $N=4$ でもっと正確に求められる. ただし, 人間がまねようとすると, 半角公式などを使って $\sin\frac{5}{12}\pi$ を求めることが必要になる.

配点　N の正しい公式に 4 点, 正しい刻み幅と分点に 3 点, 最終的な結果に 3 点

2

$N=2,4$ 分割の台形公式による近似 S_2, S_4 は

$$
\begin{aligned}
S_2&=2[\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2^1+3\cdot 2^3+\tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 2^5]=210.\\
S_4&=1[\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 3^1+4\cdot 2^4+2\cdot 3^4+\tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 2^5]=177
\end{aligned}
$$

よって $2N=4$ 分割のシンプソン公式による近似は

$$T_4=\tfrac{4S_4-S_2}{3}=166.$$

Remark　真の値は $-\frac{30}{\log 4}+\frac{158}{\log 2}=165.505\cdots$.

配点　S_4, S_2 に各 2 点. 補外の式に 3 点, 最終的な結果に 3 点

---

[2]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

平均 $\mu = \frac{1}{5}((-2) + (+5) + (-10) + 0 + (+2)) = -1$
分散 $\sigma^2 = \frac{1}{5-1}((-2+1)^2 + (+5+1)^2 + (-10+1)^2 + (0+1)^2 + (+2+1)^2) = \frac{1}{4}(1 + 36 + 81 + 1 + 9) = 32.$
標準偏差 $\sigma = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$

配点　平均, 分散 4 点. 標準偏差 2 点.

4

x, y それぞれの平均は $\mu_x = 5, \mu_y = 2.$
相関係数は

$$r = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(x_i - \mu_x)^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{5}(y_j - \mu_y)^2}} = \frac{48}{\sqrt{40}\sqrt{160}} = 0.6$$

配点　相関係数の式が正しく使えることに 4 点, いずれかの分散が求まっていることに 3 点, 最終的な値に 3 点.

講評　公式はいくつかの形があって, 確かに複雑だけど, 外部記憶ペーパーがあるんだから正しく計算できるようになろう.

5

1. $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi.$
2. $(a_1, b_1) = (0, 4), (a_2, b_2) = (0, 2), (a_3, b_3) = (1, 2), \ldots.$
3. 求まる解は $x = \frac{1}{2}\pi (= 1.57\cdots)$

配点　1. 3 個の解に各 1 点. 2. 3 ステップに各 2 点. 3. 1 点.

講評　$\frac{n}{2}\pi$ の値の計算はややこしいかな〜と思いつつ出題した問題だけど, そこじゃないポイントで間違ってる人が多い. 問題文をよく読もう. 1. 高校レベルの問題. 2. たしかにちょっと面倒. 3. 2 分法はほぼ必ず収束するわけで, それは 1 の答のうちのどれかで, 2 の区間 (a_3, b_3) に含まれるもののはず. そういう関係が成立してない答をした人は, 2 分法を正しく理解できてないと思った方がいい.

6

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{swap}(0,1),\text{multiply}(0,0.5)}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{add}(0,0,1),\text{multiply}(0,-1,2)}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{swap}(1,2),\text{multiply}(1,0.5)}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{add}(1,-2,0),\text{add}(1,-1,2)}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{multiply}(2,2),\text{add}(2,-0.5,1),\text{add}(2,0,0)}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって $x = 1, y = 0, z = 2$.

配点　部分ピボット選択に 2 点 ×2 か所, 前進消去で上三角部分も 0 にすることに 4 点, 指定の方法でなくても正しい手順で正しい答えを出してることに 2 点.

講評　人間用の Gauss-Jordan の消去法を使っている人, 前進消去後退代入でやっている人も多数. この問題できないと課題 E131 はできないと思うよ〜

7

```
double f(double v[]){
  /* ここをうめてね(ここだけ答えればいい) */
  double w[5]; /* Avを代入 */
  int i,j;
  double sum;

  for(i=0;i<n;i++){
    w[i]=0.0;
    for(j=0;j<n;j++){
      w[i]+=A[i][j]*v[j];
    }
  }

  sum=0.0;
  for(i=0;i<n;i++){
    sum+=(v[i]-w[i])*(v[i]-w[i]);
  }

  return sqrt(sum);
}
```

配点　行列とベクトルの積に 4 点, ベクトルの差の絶対値に 4 点, プログラム全体の整合性に 2 点.

講評　$A\boldsymbol{v}$ の計算は課題 E121 そのもの. $|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}|$ の計算は E122 の終了条件. あとはつなげてやるだけでしょ〜 絶対値の計算が, $|(1, -2)| = 1 + 2$ とかになっちゃってる人も多数.

8

方程式は $f(x) = \mathrm{e}^x - \log x - 3 = 0$ なので, 漸化式は $x_{n+1} = x_n - \frac{\mathrm{e}^{x_n} - \log x_n - 3}{\mathrm{e}^{x_n} - (1/x_n)}$. プログラム例は略.

配点　漸化式に 4 点, 誤差による終了条件に 4 点, プログラム全体の整合性に 2 点.

講評　$f(x)$ を読み取る前に方程式を $f(x) = 0$ の形に書き直そうよ. 指数表示は, d.ddE-nn で $d.dd \times 10^{-nn}$. それを $d.dd^{-nn}$ と誤解してる人がけっこういる… `x_current=x_next` 忘れてる人がときどきいました. `x_current` の値が変化しないよ〜

9

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(void){
  double x;
  double sum=0.0;
  int i,n;

  scanf("%d",&n);

  x=1.0;
  sum=sum+x;
  for(i=0;i<n;i++){
    x=2.0*cos(x);
    sum=sum+x;
  }
  printf("%f\n",sum);
  return 0;
}
```

配点　x_k の計算に 4 点, σ の計算に 4 点, プログラム全体の整合性に 2 点.

講評　$x_{n+1} = 2\cos(n)$ や, $x_{n+1} = x_n + 2\cos(x_n)$ でやっちゃってる, x_n は求めてるけど $\sum_{i=0}^{n} x_i$ を求めてない, などのまちがいをしてる人がいました.

10

等比級数を計算するエコじゃないプログラム. 初項が $3.0 \times 0.5^0 = 3$, 公比が 0.5, 項の個数が $i = 0, 1, \ldots, n$ の $n+1$ 項なので,

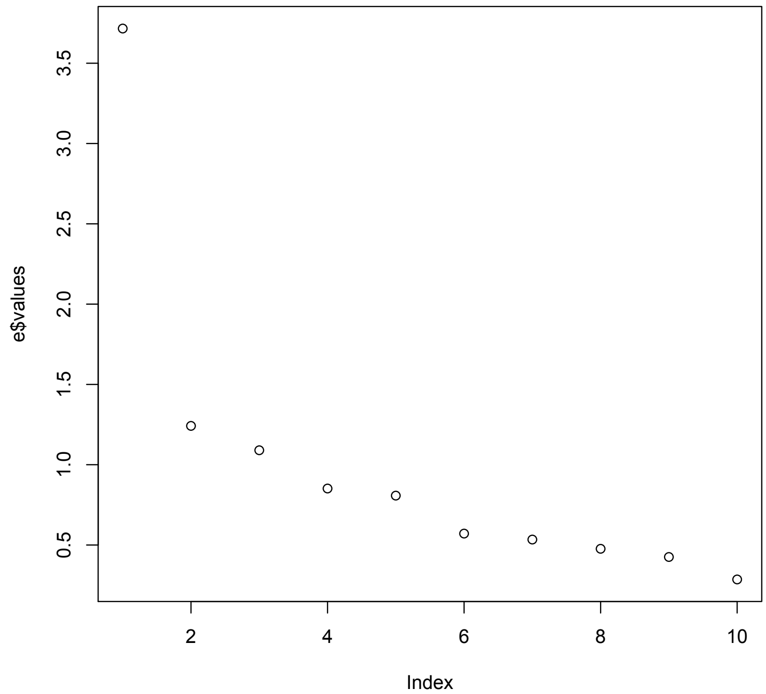
$$\sum_{i=0}^{n} 3(\tfrac{1}{2})^i = \frac{3(1 - (\frac{1}{2})^{n+1})}{1 - \frac{1}{2}} = 6(1 - (\tfrac{1}{2})^{n+1})$$

Remark　$n = 1, 2$ などで実際に試して検算しよう．
　等比級数の公式は m, ばっちり暗記してもいいし, 分子が怪しいときは, $n = 0$ だったら 初項 3 になるはずと思ってあわせよう．

配点　漸化式 3 点, σ を使って書いた式 5 点, 等比級数っぽく計算してあったら 8 点, 完答 10 点．

講評　何項か計算してみて予測するってのはあまり効率よくないのでは．プログラムから漸化式を写し取って, 数学のりで計算するのがいちばんだと思うよ〜

1 次元性の検証　10 個のアイテムの得点の積率相関行列を作り, 固有値を求めた結果を下に示す.



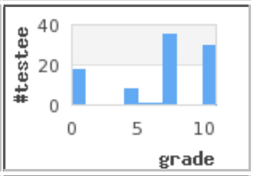
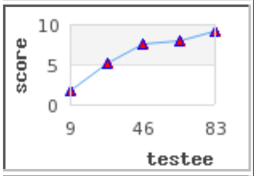
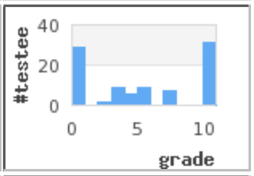
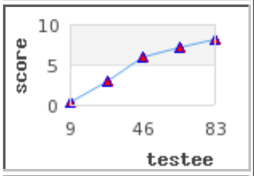
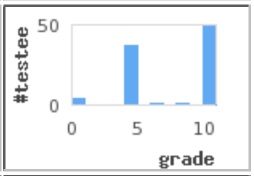
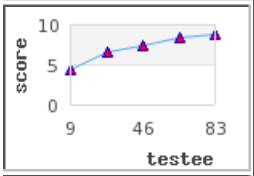
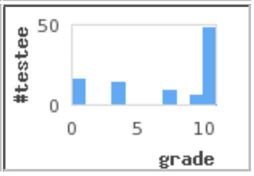
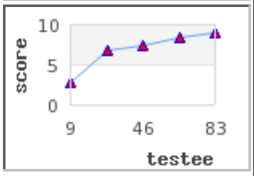
曲線の折れる位置からは, 1 因子構造であると判定できる.
一方, 1 を越える固有値の個数からは 3 因子構造と判定される.
χ^2-検定では, 1 因子構造であるとの仮説は有意水準 99% で棄却される.

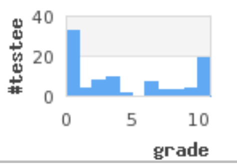
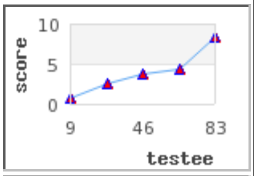
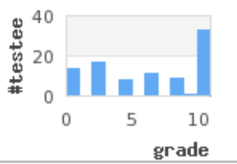
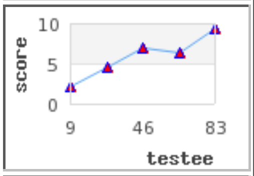
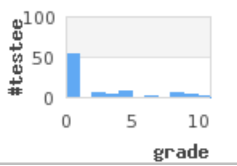
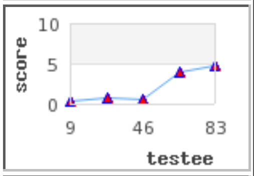
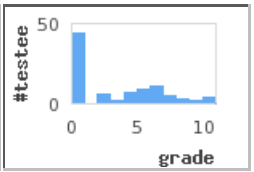
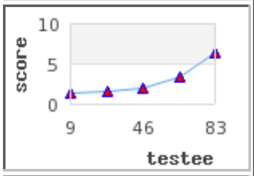
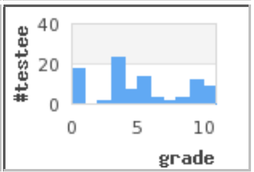
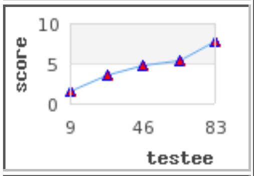
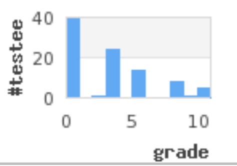
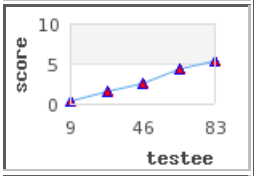
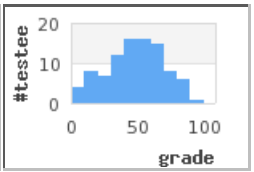
古典テスト理論による分析　テストスコア解析サービス `http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/eproj/testing/stat/` を利用した解析結果を下に示す.

Test Statistics Report

- 項目数(説明)=小問の個数: 10
- テストの合計点(説明):100
- テストの受験者数: 93
- テストの平均点(説明):47.624
- テストの点数の標準偏差(説明):21.602
- テストの最低点:4
- テストの第一4分値:31
- テストの第二4分値(=median)(説明):51
- テストの第三4分値:62
- テストの最高点:92
- テストの信頼性係数(強同族測定)(説明):0.808
- テストの信頼性係数(弱同族測定=Cronbachのα)(説明):0.805
- テストの合計点に想定される誤差(説明):9.5

- FI=facility index=項目容易度(説明)
- AV=average=項目平均点(説明)
- SD=standard deviation=項目標準偏差(説明)
- DI=discrimination index=項目弁別力(説明)
- DC=discrimination coefficient=項目弁別係数(説明)
- score dist=項目得点分布(説明)
- ICC=Item Characteristic Curve=項目特性曲線(説明)

item	FI	AV	SD	DI(0.5)	DC	score dist	ICC
item1	0.6323	6.323	3.591	0.212	0.731		
item2	0.4935	4.935	4.154	0.258	0.703		
item3	0.7118	7.118	3.263	0.116	0.437		
item4	0.6871	6.871	3.987	0.169	0.536		

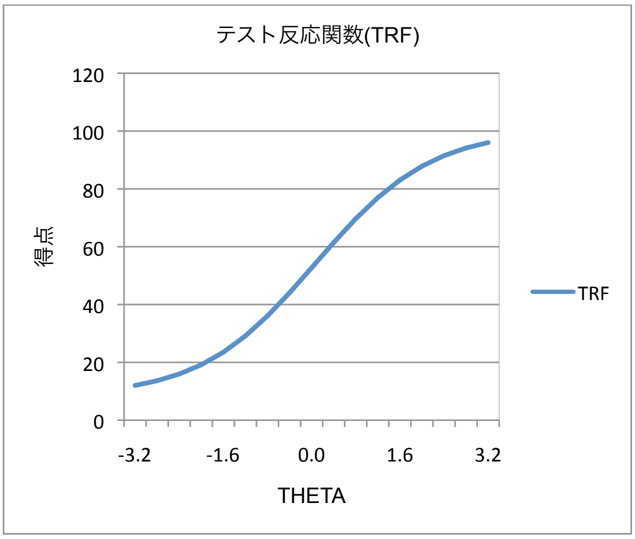
item5	0.3989	3.989	4.028	0.205	0.632		
item6	0.5839	5.839	3.871	0.177	0.606		
item7	0.2161	2.161	3.108	0.152	0.580		
item8	0.2946	2.946	3.242	0.142	0.546		
item9	0.457	4.570	3.305	0.174	0.659		
item10	0.2871	2.871	3.122	0.165	0.592		
total	0.47624	47.624	21.602	0.177	1.000		N/A

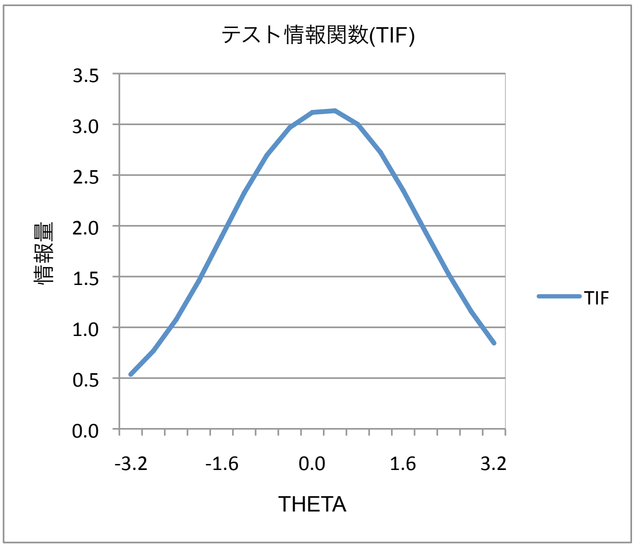
信頼性係数 0.8 は高い.

どの小問のアイテム特性曲線も正しい形をしているが, 問 3,10 の識別力が弱そうに見える. 特に問 7 はスコアの低い部分を識別できない. 力が

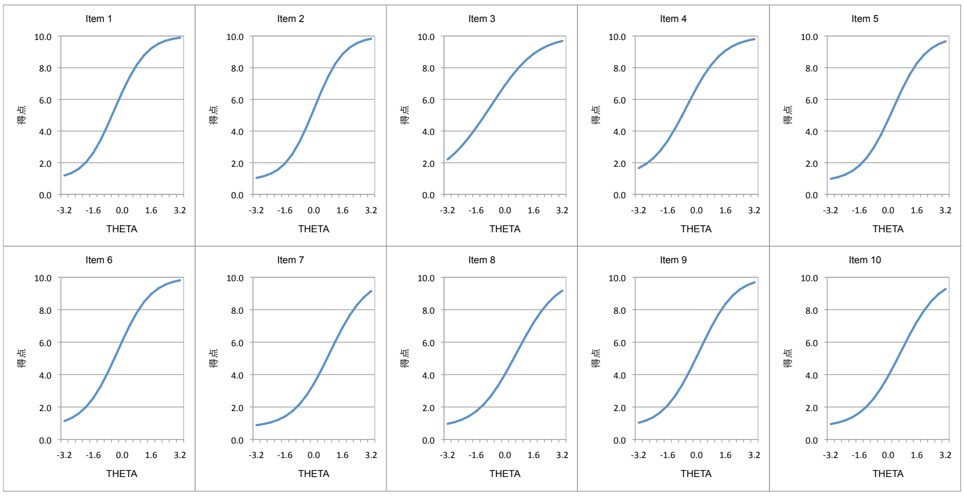
項目反応理論 (IRT) による分析　Exametrika `http://www.rd.dnc.ac.jp/~shojima/exmk/jindex.htm` による 3 パラメタ IRT 分析

基本統計量	
受検者数(N	93
項目数(n)	10
最小値(Mir	4
最大値(Ma:	92
中央値(Me	49
平均値(Me	47.624
分散(Var.)	466.629
標準偏差(S	21.602
アルファ係;	0.805
能力値	
最小値(Mir	−2.614
最大値(Ma:	2.226
中央値(Me	−0.044
平均値(Me	−0.132
分散(Var.)	0.923
標準偏差(S	0.961
テスト適合度	
カイ2乗値	338.026
自由度(deg	1206
P値	1.000
NFI	0.087
RFI	0.087
IFI	1.000
TLI	1.000
CFI	1.000
RMSEA	0.000
AIC	−2073.974
CAIC	−6334.289
BIC	−5128.289

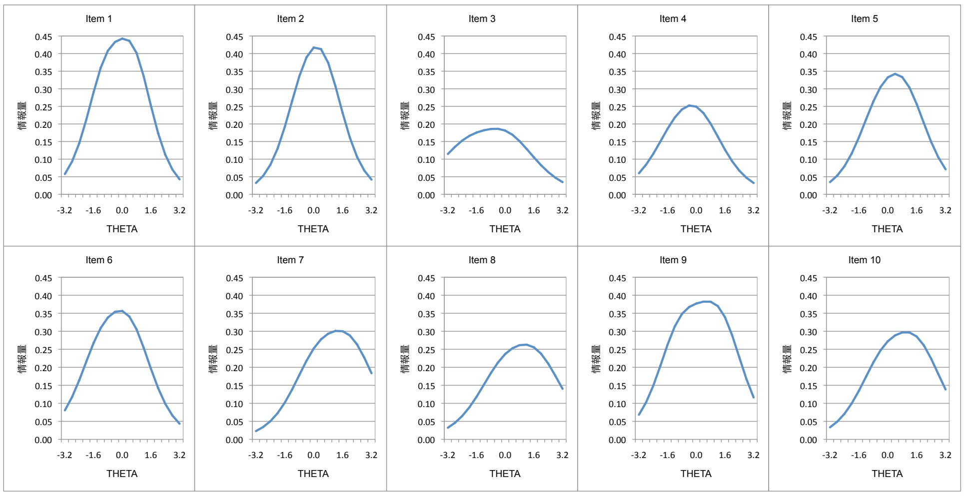




アイテム特性曲線



アイテム情報関数



問 1,2 は情報量が大きい.
問 3 は情報量が小さく, スコアの低い部分の識別にしか役立たない.
問 7,9,10 はスコアの高い部分の識別にしか役立たない.