量子力学 I 演習 問題 (第 3 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 10 月 30 日

公式

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \cos\frac{2n\pi x}{L}\cos\frac{2m\pi x}{L} =& \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \sin\frac{2n\pi x}{L}\sin\frac{2m\pi x}{L} = \delta_{nm}.\\
\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \cos\frac{2n\pi x}{L}\sin\frac{2m\pi x}{L} =& 0\\
\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \exp\frac{2n\pi x}{L}\exp\frac{2n\pi x}{L} =& \delta_{n+m,0}
\end{aligned}
$$

[3-1] 微分方程式の特解

強制振動の方程式

$$mx''(t) + m\gamma x'(t) + m\omega_0^2 x(t) = ma\cos\omega t \tag{1}$$

の特解を, 解 $x(t)$ が

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp in\omega t \tag{2}$$

と展開されると仮定して求めよ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[3-2] Fourier 係数

次の周期 L の周期関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{2\pi nix/L}$ と展開した時の f_n を求めよ. なお, 基本周期 $-L/2 < x < L/2$ だけを下に与える.

$$f(x) = 1 - |2x/L| \tag{3}$$

$$f(x) = \sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{4\pi x}{L} \tag{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < L/4) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

[3-3] Fourier 級数と波動方程式

境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ のもとでの波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{6}$$

を考える. 時刻 $t = 0$ で,

$$u(x,0) = a\sin\frac{\pi x}{L} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = b\sin\frac{2\pi x}{L} \tag{8}$$

だったとする. 任意の時刻での $u(x,t)$ を次の手順で求めよ.

1. まず一般解を求める. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x$ と展開できると仮定し, $a_n(t)$ を求めよ.

2. 次に, $u(x,t)$ に対して, $u(x,0)$ での条件を課して, $a_n(t)$ を決定せよ.

[3-4]　Fourier 変換

次の関数の Fourier 変換を求めよ．ただし，$a, \ell > 0$ は定数．

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \le 1), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{9}$$

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & (x \ge 0), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{10}$$

$$f(x) = \exp -a|x| \tag{11}$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos ax & (|x| \le \ell) \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{12}$$

[3-5]　Fourier 変換と波動方程式

無限区間 $-\infty < x < \infty$ で波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{13}$$

を考える．時刻 $t = 0$ で，

$$u(x,0) = u_0 \exp(-x^2/a^2), \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \tag{14}$$

だったとする．以後の時刻での $u(x,t)$ を求めよ．

Hint. Fourier 積分表示 $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, a(k,t) \exp ikx$ を用いる．

Hint. Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-a^2 x^2] = \sqrt{\pi}/a. \tag{15}$$