量子力学 I 演習 問題 (第 5 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 11 月 13 日

[5-1] Fourier 変換と波動方程式

無限区間 $-\infty < x < \infty$ で波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{1}$$

を考える. 時刻 $t = 0$ で,

$$u(x,0) = f(x) := \begin{cases} u_0 \times (1 - |x/a|) & (|x| < a), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0$$

だったとする. 以後の時刻での $u(x,t)$ を, 次の手順で求めよ.

1. Fourier 積分表示 $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk a(k,t) \mathrm{e}^{ikx}$ を代入して, $a(k,t)$ の満たす微分方程式を求める.
2. $u(x,0)$, $\dot{u}(x,0)$ を Fourier 変換して $a(k,0), \dot{a}(k,0)$ を求める. ただし, 上の $u(x,0)$ の Fourier 変換は $F(k) = 2u_0 \times (1 - \cos ka)/(ka)^2$
3. 時間について積分して, $a(k,t)$ を求める.
4. 逆 Fourier 変換は, 少し面倒なのでしなくてよい.

---

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[5-2] 波動方程式と初期値問題

上の問題で, $u(x,t)$ を, 次の手順にしたがって求めてみよ.

1. 任意の f_1, f_2 について $f(x,t) = f_1(x+vt) + f_2(x-vt)$ は波動方程式の解なのだった. そこで, ある f_1, f_2 で
$$u(x,t) = f_1(x+vt) + f_2(x-vt) \tag{2}$$
とかけると仮定する. 時刻 $t=0$ での初期条件から, f_1, f_2 を定めよ.

2. 波 $u(x,t)$ の時間変化を描け.

[5-3] Gauss 波束

波 $u(x,t)$ を,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ a(k,t)\mathrm{e}^{ikx}$$
$$a(k,t) = A\exp[-\tfrac{a^2}{2}(k-k_0)^2 - i\omega(k)t]$$

と Fourier 積分表示されている.

1. $\omega(k) = v \times k$ のとき, 波動方程式
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{3}$$
の解になっていることを示せ.

2. $\omega(k) = v \times k$ のとき, ある時刻 t での波の概形 (実部) を示せ. 時間が経過するとどのように進んでいくか.

Hint. Gauss 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \exp[-a^2k^2] = \sqrt{\pi}/a$. 平方完成.

[5-4] 分散関係, 群速度と位相速度

1. 平面波を重ね合わせた波
$$u(x,t) = u_0(\sin(k_0x - \omega(k_0)t) + \tfrac{1}{2}(\sin(k_+x - \omega(k_+)t) + \sin(k_-x - \omega(k_-)t)))$$
を考える. ただし, $\omega_\pm = \omega_0 \pm \delta\omega, \delta\omega \ll \omega$ とする. 群速度と位相速度を求めよ. ただし, $\omega(k) = vk$ とはかぎらないとする.

2. Gauss 波束

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ a(k,t)\mathrm{e}^{ikx} \\
a(k,t) &= A\exp[-\tfrac{a^2}{2}(k-k_0)^2 - i\omega(k)t]
\end{aligned}
$$

の群速度, 位相速度を求めよ. ただし, $\omega(k) = vk$ とはかぎらない.