量子力学 I 演習 問題 (第 7回)

樋口 さぶろお*

1997 年 12 月 4 日

極座標

2 次元直交座標 (x, y), 2 次元極座標 (r, θ) は,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (0 \le r, 0 \le \theta < 2\pi) \tag{1}$$

で関係づけられる. ある点での基底 vector を $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ および $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ とする. $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ は (x, y) (したがって (r, θ) にも) 依存しないが, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ は依存する.

[7-1] 円板型の膜の振動

半径 a の 円形の枠にはられた石鹸膜 ($0 \le x^2 + y^2 \le a^2$) の振動を考える. 枠と垂直な方向への変位を $u(x, y, t)$ とかく. 変位 $u(x, y, t)$ は, 2 次元の波動方程式

$$\Delta u(x, y, t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t) \tag{2}$$

に従う. ただし v は石鹸膜の材質によって定まる正の定数. 微分演算子 Δ は Laplacian で

$$\Delta\phi(x, y) = \nabla^2\phi(x, y) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(x, y). \tag{3}$$

また, 枠は動かないので

$$u(x, y, t) = 0 \quad \text{if} \quad x^2 + y^2 = a^2 \tag{4}$$

が課される. 次の手順で基準振動を求めよ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

1. 変数分離で解く. $u(x,y,t) = \tilde{u}(x,y)T(t)$ を仮定して, $\tilde{u}(x,y), T(t)$ の満たす微分方程式と, 境界条件を求めよ.

2. $T(t)$ を求めよ.

3. Laplacian Δ は, 極座標では

$$\Delta\phi(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}(r,\theta) \tag{5}$$

となる. これを用いて, 変数分離 $\tilde{u}(x,y) = R(r)\Theta(\theta)$ で $\tilde{u}(x,y)$ についての微分方程式を解こう. $R(r)$ の満たす微分方程式と, 境界条件を求めよ.

Remark. この解は Bessel 関数であることが知られている.

4. $\Theta(\theta)$ を求めよ.

Hint. 周期性 $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$ に注意.

5. 上に示された Laplacican の極座標表示を導け.

[7-2] Gradient 演算子の極座標表示

関数 $\phi(x,y)$ に対する gradient 演算子 の作用は

$$\mathrm{grad}\phi(x,y) = \nabla\phi(x,y) = \mathbf{e}_x\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) + \mathbf{e}_y\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) \tag{6}$$

である.

1. $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ を, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ の線型結合で書け.

2. 微分演算子 $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}$ を, $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ で表せ.

3. 関数 $\phi(x,y)$ が, 極座標で $\phi(r,\theta)$ とかけるとき,

$$\mathrm{grad}\phi(r,\theta) = \mathbf{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\theta) + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,\theta) \tag{7}$$

であることを示せ.

4. 次の関数 $\phi(x,y) = \phi(r,\theta)$ を, (x,y) でかいてあるものは (r,θ) で, (r,θ) でかいてあるものは (x,y) でかきなおせ. 便利な方の表示を用いて, gradient $\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi$ を求めよ.

$$x^2 + y^2, \quad r^{-1}, \quad \theta, \quad \exp(-r^2) \tag{8}$$