量子力学 I 演習 問題 (第 8 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 12 月 11 日

Schrödinger 方程式

波動関数 $\Psi(x,t)$ の時間発展は, (時間に依存する) Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t) = H\Psi(x,t) \tag{1}$$

にしたがって発展する. ただし, H は Hamiltonian 演算子で, 典型的には

$$H\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) \tag{2}$$

ここで $V(x)$ はポテンシャルエネルギー.

[8-1] Schrödinger 方程式

1. Hamiltonian H が時刻 t によらないとする. 変数分離 $\Psi(x,t) = \psi(x)T(t)$ により, $T(t)$ を求めよ. そのとき, $\psi(x)$ は, ある定数により

   $$H\psi(x) = E\psi(x) \tag{3}$$

   をみたすことを示せ. 関係 (3) を, 定常状態の Schrödinger 方程式といい, ‘ ψ は, 固有値 E の, H の固有関数である’ と表現する.

2. 上で求めた波動関数 $\Psi(x,t) = \psi(x)T(t)$ について, 粒子の存在確率密度 $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ が, 時刻 t に依存しないことを示せ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[8-2] 波動関数の境界条件

ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x \\ +\infty & (x < 0 \end{cases}$$

のもとで, Schrödinger 方程

1. (境界条件を考慮せずに
2. 両端 $x = 0, L$ で $\Psi(x,$
3. 確率の規格化条件から
4. $\Psi(x,t)$ の概形を描け.

[8-3] 波動関数の時間発展

ポテンシャル $V(x) \equiv 0$ の
を考える.

1. 波動関数 $\psi(x) = A e$
   $H\psi = E\psi$ を満たすこ
2. 時刻 $t = 0$ で, $\Psi(x,0)$
   発展を求めよ.
3. 時刻 $t = 0$ で, $\Psi(x,0)$
   数 $\Psi(x,t)$ と確率密度