量子力学 II 演習 問題 (第 2 回)

樋口 さぶろお*

1999 年 4 月 22 日

[2-Q1] 固有状態, 規格直交性, 期待値

有限な 1 次元空間 $0 < x < L$ に拘束された粒子の波動関数

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{1}$$

を考える. $A_n > 0, n \in \mathbb{N}$.

1. この波動関数が, 自由粒子の Hamiltonian $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数であることを示せ. 固有値を求めよ.
2. 規格化定数 A_n を適当に定めて, $\{\psi_n\}$ が正規直交系となるようにせよ.
3. 上の波動関数の重ねあわせ

$$\phi(x) = \psi_1(x) - 2\psi_2(x) \tag{2}$$

を定義する. 状態 $\psi_1(x), \phi(x)$ についてそれぞれ, 粒子のエネルギーを測定すると, どのような確率でどのような結果が得られるか.

4. 状態 $\psi_1(x), \phi(x)$ についてそれぞれ, エネルギーの期待値を求めよ.
5. 状態 $\psi_1(x), \phi(x)$ についてそれぞれ, 運動量の期待値を求めよ.
6. 状態 $\psi_1(x), \phi(x)$ についてそれぞれ, 位置の期待値を求めよ.

[2-Q2] 正規直交完全系

1. 関数系 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を考える. この関数系が正規直交系であるということの定義を書け.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

2. 以下, この関数系が正規直交系であるとする. ある関数 ψ が, 係数 $c_k \in \mathbb{C}$ を用いて,

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \phi_k(x) \tag{3}$$

と表されているとする. $c_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_k^*(x)\psi(x)$ を示せ.

3. $\psi(x)$ が規格化されているということと, $\sum_k |c_k|^2 = 1$ が同値であることを示せ.
4. 関数 ϕ_k は, 演算子 $\hat{f}$ の, 固有値 f_k を持つ固有関数であるとする:

$$\hat{f}\phi_k(x) = f_k\phi_k(x). \tag{4}$$

このとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x)\hat{f}\psi(x) = \sum_k f_k |c_k|^2 \tag{5}$$

を示せ.

[2-Q3] 波動関数の境界条件と規格化

ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ +\infty & (x < 0, L < x) \end{cases} \tag{6}$$

のもとで, Schrödinger 方程式 $H\psi = E\psi$ の解を考える.

1. (境界条件を考慮せずに) $0 < x < L$ での一般解を求めよ.
2. 両端 $x = 0, L$ で 境界条件を課して, 束縛状態を求めよ.
3. 確率の規格化条件から, 規格化定数を定めよ.
4. このとき, これらの状態が正規直交系になっていることを示せ.
5. エネルギーの低い方から, いくつかの波動関数の概形を描け.
6. 基底状態のエネルギーを求めよ.
7. 基底状態について, x, p の期待値を求めよ.

[2-Q4] 3 次元の箱型ポテンシャル

質量 m の量子力学的粒子が, 3 辺が $a \times b \times c$ の箱に閉じ込められている. すなわち 3 次元のポテンシャル

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

のもとで運動している.

1. Hamiltonian の固有状態と固有値を求めよ.

Hint. 変数分離.

2. 基底状態について, 位置と運動量の期待値を求めよ.
3. 粒子が, 上で求めた固有状態の 1 つにあるときに, 箱の壁 $x = a$ が受ける圧力を求めよ.

Hint. 圧力 $p = -dE/dV$.

参考文献

[1] ランダウ, リフシッツ 量子力学 1,2 (東京図書)