量子力学 II 演習 問題 (第 6 回)

樋口 さぶろお*

1999 年 6 月 3 日

調和振動子

位置, 運動量演算子をそれぞれ x, p ($[x,p] = i\hbar$, あるいは $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ と思ってもよい) とする. 調和振動子の Hamiltonian は,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

である ($m, \omega \in \mathbb{R}$).

これを解くのに (i.e. 束縛状態や期待値を求めるのに), 昇降演算子

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{1}{im\omega} p \right), \quad b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{1}{im\omega} p \right)$$

と定義するとよい. これらは次の関係を満たす.

b と $b^\dagger$ は hermite 共役. (1)

$$H = \hbar\omega b^\dagger b + \hbar\omega/2. \tag{2}$$

$$[b, b^\dagger] = 1. \tag{3}$$

H の (規格化された) 固有状態 $|\psi_n\rangle$ は,

$b^\dagger b |\psi_n\rangle = n |\psi_n\rangle$ で特徴づけられる. $n = 0, 1, 2, \ldots$. (4)

$$b |\psi_n\rangle = \sqrt{n} |\psi_{n-1}\rangle, b^\dagger |\psi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\psi_{n+1}\rangle. \tag{5}$$

状態 $|\psi_n\rangle$ はしばしば $|n\rangle$ と略記される.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

例題

行列要素 $\langle 0|x^2|n\rangle$ を計算せよ.

[6-Q1] 昇降演算子を用いた期待値の計算

1. 期待値 $\langle 1|x|1\rangle, \langle 1|x^2|1\rangle$ を求めよ.
2. 行列要素 $\langle 1|p|n\rangle, \langle 0|p^2|n\rangle$ を求めよ.

[6-Q2] Hermite polynomials

上で考えた固有関数 $\psi_a(x)$ の形を具体的に求めることを考えよう.

1. 固有値 $a = 0$ に対応する固有関数 $\psi_0(x)$ は基底状態となる. なぜなら, $b\psi_0(x) = 0$ となり, $a = 0$ より小さい固有値をもつ固有関数は作れないからである. まず, この $\psi_0(x)$ を求めよう. 演算子 p を $-i\hbar(\partial/\partial x)$ とみなすと式

$$b\psi_0(x) = 0$$

は x についての微分方程式になる. これを解いて, $\psi_0(x)$ を求めよ.

Hint. $f'(x) = Axf(x)$ の type の微分方程式の解は $f(x) = C\exp[Bx^2]$.

2. 積分 $\int dx \psi_0^*(x) x^2 \psi_0(x)$ によって, x^2 の期待値を求めよ.
3. 関係 $b^\dagger |\psi_a\rangle = \sqrt{a+1} |\psi_{a+1}\rangle$ を用いて, $a = 1$ に対する $\psi_a(x)$ を求めよ.

Remark. 一般の $a = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, は, $\psi_n(x)$ は本質的に Hermite 多項式 $\times \exp[-Ax^2]$ となることが知られている.

[6-Q3] 調和振動子の不確定性関係

任意の量子力学的状態は, uncertainty relation

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \times \langle (\Delta p)^2 \rangle \geq \hbar^2/4 \tag{6}$$

を満たす. ただし, 演算子 A に対して,

$$\Delta A := A - \langle A \rangle$$

記号 $\langle \cdot \rangle$ は, 考えている状態に関する期待値を表す: $\langle \cdot \rangle = \langle \psi | \cdot | \psi \rangle$.

調和振動子のエネルギー固有状態について, 不確定性関係の式の左辺を求めよ.

[6-Q4]　昇降演算子の性質

上であげた $b, b^\dagger, H$ の性質のうち, できるだけ多くのものを証明せよ. 最後のものについては, 次の常套手段を用いてもよい.

1. 交換関係を用いて, $(b^\dagger b)b^\dagger |n\rangle = (n+1) \times b^\dagger |n\rangle$ をいう. これで, $b^\dagger |n\rangle = C\,|n+1\rangle$ をいったことになる.
2. 次に規格化条件から 比例定数 C を決める.