量子力学 II 演習 問題 (第 8 回)

樋口 さぶろお*

1999 年 6 月 17 日

[8-Q1] 演算子の行列表示

調和振動子を考える．先週の記号を使う．昇降演算子を $b, b^\dagger$ とする．

1. 演算子 b と $b^\dagger$ が互いに Hermite 共役であることを示せ．
2. 正規直交基底として，エネルギー固有状態 $|n\rangle, n = 0, 1, 2, \ldots$ をとる．この基底のもとで，Hamiltonian H，昇降演算子 $b, b^\dagger$，演算子 x, p を行列表示せよ．
3. 上の行列を用いて，$\langle 1|x^2|1\rangle, \langle 1|p^2|1\rangle$ を計算せよ．

[8-Q2] 等方的な 3 次元調和振動子

3 次元の等方的調和振動子

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2). \tag{1}$$

を考える．以下，1 次元の調和振動子の解は知っているものとして使ってよい．

Hint. 極座標でもできるが，ここではそうしないで，直交座標で変数分離してみよう．

1. 基底エネルギーを求めよ．
2. 第一励起状態の energy を求めよ．何重に縮退しているか．
3. 第二励起状態の energy を求めよ．何重に縮退しているか．

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[8-Q3] Hermite 多項式の生成関数

1 次元の調和振動子を考える．これまでの記号を流用する．Energy 固有状態 $|n\rangle$ に対応する規格化された波動関数$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ は，

$$\psi_n(x) = (2\pi)^{-1/4}\alpha^{1/2}(n!)^{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\alpha^2x^2}H_n(\alpha x) \tag{2}$$

であることが知られている．ただし，$\alpha := \sqrt{2m\omega/\hbar}$．$H_n(x)$ は Hermite 多項式

$$H_n(\xi) = (-1)^n\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}. \tag{3}$$

1. 関係 $\sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi)\frac{t^n}{n!} = \mathrm{e}^{t\xi-\frac{1}{2}t^2} =: S(t,\xi)$ を示せ．この $S(t,\xi)$ を，Hermite 多項式の生成関数 (母関数) という．
2. 上の生成関数を利用して，行列要素 $\langle n|x|m\rangle$ を求めよ．

Hint. $S(s,\xi)\times S(t,\xi)$ の s^nt^m の係数は$\frac{1}{n!m!}H_n(\xi)H_m(\xi)$．

3. 上で与えられた波動関数 $\psi_n(x)$ が，漸化式 $b^\dagger\psi_n(x) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x)$ を満たすことを確かめよ．

[8-Q4] 調和振動子の coherent 状態

1 次元の調和振動子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{4}$$

を考える．昇降演算子 $b, b^\dagger$ は

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - (im\omega)^{-1}p) \tag{5}$$

$$b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + (im\omega)^{-1}p) \tag{6}$$

で定義され，$[b, b^\dagger] = 1$ をみたし，$H = \hbar\omega(b^\dagger b + 1/2)$ なのだった．H の固有状態を $|n\rangle$ と書く．ただし $b^\dagger b|n\rangle = n|n\rangle$．

消滅演算子 b の 固有状態 (H の固有状態とは限らない) を coherent 状態と言い，$|\psi_\lambda\rangle$ と書く．$\lambda \in \mathbb{C}$ は固有値:

$$b|\psi_\lambda\rangle = \lambda|\psi_\lambda\rangle \tag{7}$$

1. 状態

$$\exp(-|\lambda|^2/2)\exp(\lambda b^\dagger)\,|0\rangle \tag{8}$$

が正しく規格化された coherent 状態 $|\psi_\lambda\rangle$ であることを示せ．ただし，$|0\rangle$ は調和振動子の基底状態 $H\,|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\,|0\rangle$.

2.

$$|\psi_\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,|n\rangle \tag{9}$$

と展開するとき，$|f(n)|^2$ が Poisson 分布関数であることを示せ．

3. 状態 $\exp(ip\ell/\hbar)\,|0\rangle$ が coherent 状態であることを示せ．演算子 b の固有値は何か．ただし，p は運動量演算子，ℓ は長さの次元を持つ実数．

4. 任意の状態は，uncertainty relation

$$\langle(\Delta x)^2\rangle \times \langle(\Delta p)^2\rangle \leq \hbar^2/4p \tag{10}$$

を満たすが，coherent 状態に対しては特に等号 (minimum uncertainty relation) が成立することを示せ．ただし，演算子 A に対して，

$$\Delta A := A - \langle A\rangle$$

記号 $\langle\cdot\rangle$ は，考えている状態に関する期待値を表す: $\langle\cdot\rangle = \langle\psi|\cdot|\psi\rangle$.

参考文献

[1] ランダウ，リフシッツ 量子力学 1,2 (東京図書)