量子力学 II 演習 問題 (第 10 回)

樋口 さぶろお*

1999 年 7 月 1 日

[10-Q1] 中心力場

中心力ポテンシャル $U(r)$ のもとで 3 次元空間を運動する, 質量 m の粒子の量子力学を考える.

1. (時間に依存しない) Schrödinger 方程式をかけ.
2. 極座標 (r, θ, ϕ) をとったとき, 波動関数$\Psi(r, \theta, \phi)$ が

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

と変数分離されるとする. $R(r)$, $\Theta(\theta)$, $\Phi(\phi)$ の満たす方程式をかけ (hint: 方位量子数, 磁気量子数にあたる新しい定数が 2 つ現れる). ただし, $\mathbf{L}^2$ は全角運動量演算子

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right]$$

とすると Laplacian の極座標表示は次の通り.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \mathbf{L}^2$$

3. $\chi(r) := R(r)r$ と定義すると, $\chi(r)$ は, ポテンシャル

$$V_\ell(r) = U(r) + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \ell(\ell + 1)$$

のもとで 1 次元空間を運動する粒子の波動関数であることを示せ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[10-Q2] 3 次元球対称井戸型 potential

中心力ポテンシャル

$$U(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ +\infty & (r \geq a) \end{cases}$$

のもとで 3 次元空間を運動する, 質量 m の粒子の量子力学を考える.

1. 極座標 (r, θ, ϕ) をとったとき, 波動関数$\Psi(r, \theta, \phi)$ が

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) \tag{1}$$

と変数分離されるとする. $R(r)$ の満たす方程式をかけ.

2. 動径波動関数 $R(r)$ は, 本質的に, spherical Bessel 方程式

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} z^2 \frac{\partial}{\partial z} f(z) + \left(1 - \frac{n(n+1)}{z^2} \right) f(z) = 0$$

に従う spherical Bessel 関数 $j_n(z)$ であることを示せ.

3. これを用いて, 系のエネルギー固有値を, spherical Bessel 関数 $j_n(z)$ の k 番目の零点 γ_{nk} で表せ.

[10-Q3] 3 次元の調和振動子 (球座標)

3 次元の一様な調和振動子

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{r}^2 \tag{2}$$

を考える. x, y, z 方向の昇降演算子を昇降演算子

$$b_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (x - (im\omega)^{-1} p_x), \quad b_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (x + (im\omega)^{-1} p_x) \tag{3}$$

などとする.

H の固有状態は, 演算子 $b_x^\dagger b_x, b_y^\dagger b_y, b_z^\dagger b_z$ の固有値 (n_x, n_y, n_z) で label される. これを $\psi_{n_x n_y n_z}$ とかく. energy 固有値は

$$E = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) \tag{4}$$

なのだった.

1. 角運動量演算子 $L_x := yp_z - zp_y$ を, 昇降演算子でかくと $L_x = i\hbar(b_y b_z^\dagger - b_z b_y^\dagger)$ となることを示せ.
2. 基底状態 ψ_{000} が, $\mathbf{L}^2$ の, 固有値 0 の固有関数であることを示せ.
3. 3 重縮退している第一励起状態 $\psi_{100}, \psi_{010}, \psi_{100}$ が, $\mathbf{L}^2$ の固有値 $1(1+1)\hbar^2$ (しばしば p-状態, $J=1$ などと書かれる) の固有状態であることを示せ.
4. この 3 つの状態の適当な線型結合をとって, L_z の固有状態を 3 つ作れ.
5. 6 重縮退している第二励起状態は, s-状態 $J=0$ の 1 重項と, d-状態 $J=2$ の 5 重項からなることを示せ.

[10-Q4]　球関数

極座標をとる:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

演算子 M_3, $\mathbf{M}^2$ の同時固有関数の $\psi_{jm}(r,\theta,\phi)$ で, $j \to j, m \to -j$ としたもの$\psi_{j\,-j}(r,\theta,\phi)$ を考える. 次の手順で, $\psi_{j\,-j}(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{j\,-j}(\theta,\phi)$ とかいたときの球関数 $Y_{j\,-j}(\theta,\phi)$ を具体的に求めよ. 以下, 規格化は暇と興味のある人だけ気にすればよい.

1. $Y_{j\,-j}(\theta,\phi)$ が θ と ϕ に変数分離されるとして, ϕ-依存性を, $M_3 Y_{j\,-j} = -jY_{j\,-j}$ から決めよ.

Hint. $M_3 = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$.

2. $M_-\psi_{j\,-j} = 0$ となる. これを解いて $Y_{j\,-j}$ の θ-依存性を決めよ. ただし, $M_\pm$ は

$$M_\pm = \mathrm{e}^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

という表示を持つことを使ってよい.

3. $Y_{j\,(1-j)}(\theta,\phi)$ を求めよ.