量子力学 II 演習 問題 (第 4回)

樋口 さぶろお*

1996 年 11 月 7 日

[4-1]　角運動量代数の復習

角運動量代数 $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ (あとは cyclic) を考える. $\boldsymbol{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ と S_z の同時固有状態が考えられるのだった. その, 規格化された同時固有状態を, $|jm\rangle$ とかく:

$$
\begin{aligned}
&(1) & \boldsymbol{S}^2 |jm\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle, \\
&(2) & S_z |jm\rangle &= m\hbar |jm\rangle, \\
&(3) & \langle jm|jm\rangle &= 1.
\end{aligned}
$$

1. $S_\pm := S_x \pm iS_y$ とおく. $[S_z, S_\pm] = \pm\hbar S_\pm$. を示せ.
2. 上を用いて, $S_\pm |jm\rangle \propto |j\ m\pm 1\rangle$ を示せ.
3. 状態 $S_\pm |jm\rangle$ を規格化定数を求め, $S_\pm |jm\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\hbar\, |j\ m\pm 1\rangle$ を示せ.

Hint. 状態 $|jm\rangle$ は $S_x^2 + S_y^2 = \boldsymbol{S}^2 - S_z^2$ の固有状態.

[4-2]　角運動量の合成

Spin 1 を持つ 2 つの (区別できる) boson $i = 1, 2$ があり, その spin 演算子を $\boldsymbol{S}_i = (S_{ix}, S_{iy}, S_{iz})$ とかく. $\boldsymbol{S}_1^2$ と S_{1z} の同時固有状態を $u_m (m = -1, 0, +1)$ とし, $\boldsymbol{S}_2^2$ と S_{2z} の同時固有状態を $v_m (m = -1, 0, +1)$ とする.

すなわち

$$
(4) \quad
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_1^2 u_m &= 1(1+1)\hbar^2 u_m & S_{1z} u_m &= m\hbar u_m \\
\boldsymbol{S}_2^2 v_m &= 1(1+1)\hbar^2 v_m & S_{2z} v_m &= m\hbar v_m
\end{aligned}
$$

とする (いわば, $u_m, v_m \equiv |j=1, m\rangle$). 演算子 $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)$ を $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ と定義する.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

1. 状態 $u_1 v_1$ が $\boldsymbol{S}^2, S_z$ の同時固有関数であることを示せ. 固有値は何か. 式

   (5) $\quad 2\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 = S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} + 2S_{1z}S_{2z}$

   が有用かもしれない ($S_\pm := S_x \pm \sqrt{-1}S_y$).

2. 状態 $u_1 v_1$ に S_- を繰り返し作用させたものは, また $\boldsymbol{S}^2, S_z$ の同時固有状態であり, $j = 2$ の 5 重項をなす. これらの固有状態を求め, 規格化せよ.

3. 他に, $j = 1$ の 3 重項, $j = 0$ の 1 重項がある. これらに属する状態を求めよ.

[4-3] 角運動量の合成と Clebsch-Gordan 係数

2 つの角運動量 $\boldsymbol{J}_1 = (J_1^x, J_1^y, J_1^z), \boldsymbol{J}_2 = (J_2^x, J_2^y, J_2^z)$ を考える. 交換関係は,

(6) $\quad [J_a^i, J_b^j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_a^k\delta_{ab} \quad (a, b = 1, 2, i, j, k = x, y, z)$

である. 全角運動量を $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$ とする.

4 つの演算子 $\boldsymbol{J}_1^2, \boldsymbol{J}_2^2, J_1^z, J_2^z$ は互いに可換なので, 規格化されたこれらの同時固有状態 $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$ を考えるのは自然である:

$$
\begin{aligned}
&(7) \quad \boldsymbol{J}_a^2|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle &=& \; j_a(j_a+1)\hbar^2|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle, \\
&(8) \quad J_a^z|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle &=& \; m_a\hbar|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle.
\end{aligned}
$$

一方, 別の 4 つの演算子 $\boldsymbol{J}_1^2, \boldsymbol{J}_2^2, \boldsymbol{J}^2, J^z = J_1^z + J_2^z$ も互いに可換なので, 規格化されたこれらの同時固有状態 $|j_1 j_2; jm\rangle$ を考えるのも自然である:

$$
\begin{aligned}
&(9) \quad \boldsymbol{J}_a^2|j_1 j_2; jm\rangle &=& \; j_a(j_a+1)\hbar^2|j_1 j_2; jm\rangle, \\
&(10) \quad \boldsymbol{J}^2|j_1 j_2; jm\rangle &=& \; j(j+1)\hbar^2|j_1 j_2; jm\rangle, \\
&(11) \quad J^z|j_1 j_2; jm\rangle &=& \; m\hbar|j_1 j_2; jm\rangle.
\end{aligned}
$$

これらの 2 つの基底は, unitary 行列で結ばれる.

(12) $\quad |j_1 j_2; jm\rangle = \displaystyle\sum_{m_1}\sum_{m_2}|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; jm\rangle$

行列 $\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; jm\rangle$ の成分を Clebsch-Gordan 係数という.

1. 選択則 $\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; jm\rangle \neq 0 \Rightarrow m = m_1 + m_2$. を示せ.

Hint. 演算子 $J^z - J_1^z - J_2^z = 0$ を適当な状態ではさむ.

2. 具体例として, $j_1 = \ell \in \mathbf{Z}, j_2 = s = 1/2$ という, 電子の軌道角運動量とスピン角運動量の合成を考える. Clebsch-Gordan 係数が zero にならないような j の値は何か. その各々について, Clebsch-Gordan 係数が zero にならないような (m_1, m_2) を (m_1, m_2)-平面に図示せよ.

Hint. $\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; jm\rangle \neq 0 \Rightarrow |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.