量子力学 II 演習 問題 (第 5回)

樋口 さぶろお*

1996 年 11 月 14 日

[5-1]　一般化された不確定性関係

一般の状態 ψ に関する期待値 を単に $\langle \cdot \rangle = \langle \psi | \cdot | \psi \rangle$ と略記する. 任意の演算子 A, B について, 一般化された不確定性関係

(1)　$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \dfrac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$

が成り立つことが示せる [5, p.35]. ただし,

$$\Delta A := A - \langle A \rangle.$$

1. 式
$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$
を示せ.
2. $A = q, B = p$ の場合に, 正準交換関係と (1) から, 座標と運動量の間の通常の不確定性関係を導け.
3. Spin-1/2 の系を考える. Spin 演算子を $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)$ とかく: $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$, etc. $A = S_x$, $B = S_y$, 状態 $|\psi\rangle = |j = 1/2 \;\; m = +1/2\rangle$ (S_z の固有状態) の場合に, 式 (1) の両辺を計算せよ.

[5-2]　Bloch の定理

1 次元を運動する粒子の量子力学を考える. 波動関数を $\psi(x)$ と書く.

*Internet address: hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

1. 演算子

$$(2) \quad T_a = \exp\left(i\frac{a}{\hbar}p\right)$$

が $-a$ の並進を表す演算子であること, すなわち

$$(3) \quad T_a\psi(x) = \psi(x+a)$$

を示せ.

Hint 表示 $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ をとってもよい.

Hint あるいは, $\psi(x) = \int dy\delta(x-y)\psi(y)$ と位置固有関数に分解し, $[x,p] = i\hbar, [x, f(p)] = i\hbar f'(p)$ を用いてもよい.

2. 粒子が周期 a の周期的ポテンシャル $V(x)$ のもとで運動しているとする [1]5-2[5] :

$$(4) \quad H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x), \quad \text{ただし}\, V(x+a) = V(x).$$

これは, 格子定数 a の結晶の中を運動する電子のモデルである. この Hamiltonian H と並進演算子 T_a が可換であることを示せ.

3. Hamiltonian H と並進演算子 T_a が可換であるので, 同時固有関数 $\psi(x)$ が存在する. その $\psi(x)$ が, 周期 a の周期関数 $u(x)$ と実数 k を用いて

$$(5) \quad \psi(x) = \mathrm{e}^{ikx}u(x)$$

と書けることを示せ. この事実を Bloch の定理という. 波数 k が $\bmod 2\pi/a$ でしか決まらないということが Brillouin zone の存在.

Hint 並進演算子 T_a の固有値を A と書くと, $|A| = 1$ でなければならないことがいえる. すると, $A = \mathrm{e}^{ika}$ である.

[5-3] 調和振動子の coherent 状態

1 次元の調和振動子

$$(6) \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

を考える. 昇降演算子 $b, b^\dagger$ は

$$(7) \quad b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - (im\omega)^{-1}p)$$

$$(8) \quad b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + (im\omega)^{-1}p)$$

で定義され, $[b, b^\dagger] = 1$ をみたし, $H = \hbar\omega(b^\dagger b + 1/2)$ なのだった. H の固有状態を $|n\rangle$ と書く. ただし $b^\dagger b\,|n\rangle = n\,|n\rangle$.

消滅演算子 b の 固有状態 (H の固有状態とは限らない) を coherent 状態と言い, $|\psi_\lambda\rangle$ と書く. $\lambda \in \mathbf{C}$ は固有値:

(9) $b\,|\psi_\lambda\rangle = \lambda\,|\psi_\lambda\rangle$

1. 状態

   (10) $\exp(-|\lambda|^2/2)\exp(\lambda b^\dagger)\,|0\rangle$

   が正しく規格化された coherent 状態 $|\psi_\lambda\rangle$ であることを示せ. ただし, $|0\rangle$ は調和振動子の基底状態 $H\,|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\,|0\rangle$.

2. (11) $|\psi_\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,|n\rangle$

   と展開するとき, $|f(n)|^2$ が Poisson 分布関数であることを示せ.

3. 任意の状態は, uncertainty relation

   (12) $\Delta x \times \Delta p \leq \hbar/2$

   を満たすが, coherent 状態に対しては特に等号 (minimum uncertainty relation) が成立することを示せ. ただし, 演算子 A に対して,

   $$(\Delta A)^2 := \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2,$$

   記号 $\langle\cdot\rangle$ は, 考えている状態に関する期待値を表す: $\langle\cdot\rangle = \langle\psi|\cdot|\psi\rangle$.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.