量子力学 II 演習 問題 (第 11回)

樋口 さぶろお*

1997年1月9日

[11-1]　回転対称井戸型ポテンシャル

質量 m の量子力学的粒子が, 2 次元空間を, ポテンシャル

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & (x^2+y^2<a^2) \\ +\infty & (x^2+y^2 \geq a^2) \end{cases}$$

のもとで運動している.

1. Hamiltonian の固有状態を求める. 波動関数が動径部分 $R(r)$ と角度部分 $\Theta(\theta)$ の積でかけるとして, $\Theta(\theta)$ の満たす方程式をみちびけ (Θ が, ある演算子の固有状態であるという式になる). ただし, Laplacian の極座標表示は

   $$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \qquad (1)$$

2. 角度部分が $\Theta_n(\theta) \sim \exp(in\theta)$, $n \in \mathbb{Z}$ であることを示せ.

3. 角度部分が $\Theta_n(\theta)$ であるときに動径部分 $R(r)$ の満たす方程式を考える. 波動関数と座標 x を適当に定数倍すると Bessel の微分方程式

   $$\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z \frac{d}{dz} f(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) f(z) = 0$$

   に帰着することを示せ.

*Internet: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

4. Bessel の微分方程式の解で, $x = 0$ で発散しないものが Bessel 関数 $J_n(x)$ である. Bessel 関数の $x > 0$ なる零点を $0 < \gamma_{n1} < \gamma_{n2} < \cdots < \gamma_{nk} < \cdots$ とする. 固有関数が, 規格化を除いて, n, k により

$$\Psi_{n,k}(x, y) \propto J_n(\gamma_{nk} r/a) \exp(in\theta)$$

となることを示し, エネルギー固有値を γ_{nk} を用いてかけ.

[11-2] 中心力場

中心力ポテンシャル $U(r)$ のもとで 3 次元空間を運動する, 質量 m の粒子の量子力学を考える.

1. 極座標 (r, θ, ϕ) をとったとき, 波動関数 $\Psi(r, \theta, \phi)$ が

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi) \tag{2}$$

と変数分離されるとする. $R(r), Y(\theta, \phi)$ の満たす方程式をかけ (hint: 方位量子数 ℓ にあたる新しい定数が現れる). ただし, Laplacian ∇^2 の極座標表示

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \boldsymbol{L}^2 \tag{3}$$

は使ってよい ($\boldsymbol{L}^2$ は, 全角運動量演算子).

2. $\chi(r) := R(r) r$ と定義すると, $\chi(r)$ の満たす方程式は 1 次元の Schrödinger 方程式とみなせることを示せ. 実効ポテンシャルは何か.

3. 以下, ポテンシャルが

$$U(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ +\infty & (r \geq a) \end{cases}$$

であるとする. 動径波動関数 $R(r)$ は, 本質的に, spherical Bessel 方程式

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} z^2 \frac{\partial}{\partial z} f(z) + \left(1 - \frac{n(n+1)}{z^2} \right) f(z) = 0$$

に従う spherical Bessel 関数 $j_n(z)$ であることを示せ.

4. Spherical Bessel 関数 $j_n(z)$ と, Bessel 関数 $J_n(z)$ の間に,

$$j_n(z) = z^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

という関係があることを示せ. これを用いて, 系のエネルギー固有値を, Bessel 関数 $J_n(z)$ の k 番目の零点 γ_{nk} で表せ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.