量子力学 II 演習 問題 (第 3回)

樋口 さぶろお*

1997年10月27日

確率密度と確率流密度

1 次元の波動関数 $\Psi(x,t)$ を考えたとき, 関数

(1) $\rho(x,t) := |\Psi(x,t)|^2$

は確率密度と解釈される. 確率流れ密度 $j(x,t)$ を

(2) $$j(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)^* - \Psi(x,t)^*\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)\right] = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\ \Psi(x,t)^*\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)$$

と定義すると, Schrödinger 方程式を満たす波動関数について, 局所的な
確率保存則 (連続の式)

(3) $$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0$$

が成立する.

[3-1] 確率の流れ

1. Schrödinger 方程式を満たす波動関数について, 局所的な確率保存則 (3) が成立することを示せ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

2. 次の波動関数について, 確率密度, 確率流れ密度を求めよ.

$$
\begin{aligned}
&(4) \quad \Psi(x,t) &=& \exp(ikx - i\omega t), \\
&(5) \quad \Psi(x,t) &=& \exp(-x/a - i\omega t), \\
&(6) \quad \Psi(x,t) &=& \int dk \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-a^2(k-k_0)^2/2} \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-ik^2\hbar t/2m}.
\end{aligned}
$$

[3-2] 3次元の確率流れ密度

1. 確率流れ密度は, 3 次元では vector となり,

$$(7) \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi(\boldsymbol{x},t)\nabla\Psi(\boldsymbol{x},t)^* - \Psi(\boldsymbol{x},t)^*\nabla\Psi(\boldsymbol{x},t)\right]$$

と書かれることを示せ.

2. 次の波動関数について, 確率密度, 確率流れ密度を求めよ. また $k, \boldsymbol{k}$ と ω を適当にとれば真空の Schrödinger 方程式を満たすことを示せ.

$$
\begin{aligned}
&(8) \quad \Psi(\boldsymbol{x},t) &=& \exp(i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)), \\
&(9) \quad \Psi(\boldsymbol{x},t) &=& \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\exp(i(k|\boldsymbol{x}| - \omega t))
\end{aligned}
$$

[3-3] 3次元の調和振動子

3次元の調和振動子の Hamiltonian は, $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ により,

$$(10) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$$

で与えられる. 以下, 1 次元の調和振動子のエネルギー固有状態, エネルギー固有値は知っているものとしてよい.

1. 3次元調和振動子のエネルギー固有値, エネルギー固有状態を求めよ. 固有状態は, 1次元の調和振動子のエネルギー固有状態を使って表せばよい.

2. 基底状態について, 期待値

$$(11) \quad \langle x^2\rangle, \langle \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\rangle, \langle xyz\rangle, \langle (xyz)^2\rangle$$

を求めよ.

[3-4]　Schwinger の振動子 model による角運動量

2 つの (結合していない) 調和振動子 $+, -$ を考える. その昇降演算子を $a_\pm^\dagger, a_\pm$ と書く. 交換関係は $[a_\pm, a_\pm^\dagger] = 1$ (複号同順) なのだった. また, 結合していないことから, $[a_+, a_-] = [a_+^\dagger, a_-] = [a_+, a_-^\dagger] = [a_+^\dagger, a_-^\dagger] = 0$ である.

1. 演算子 $J_\pm (=: J_x \pm iJ_y), J_z$ を

   $$\begin{aligned} (12)\quad J_\pm &= \hbar a_\pm^\dagger a_\mp, \\ (13)\quad J_z &= (\hbar/2)(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) \end{aligned}$$

   により定義すると, これは, 通常の角運動量代数の交換関係

   $$[J_x, J_y] = \sqrt{-1}\hbar J_z, \ldots \quad (\text{巡回置換})$$

   または

   $$\begin{aligned} [J_z, J_\pm] &= \pm\, \hbar J_\pm, \\ [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z \end{aligned}$$

   を満たすことを示せ.

2. 角運動量代数でいう $\boldsymbol{J}^2$ を ‘全個数演算子’ $N = N_+ + N_-$ で表せ. ただし $N_\pm = a_\pm^\dagger a_\pm$.

3. 固有状態 $|jm\rangle$ と $|n_+ n_-\rangle$ の対応を見つけよ. ただし, $N_\pm |n_+ n_-\rangle = n_\pm |n_+ n_-\rangle$.