

量子力学 II 演習問題 (第 4 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 11 月 10 日

1 次元の散乱問題

1 次元の波動関数 $\Psi(x, t)$ を考える.

確率密度 $\rho(x, t) := |\Psi(x, t)|^2$,

確率流れ密度 $j(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\Psi(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t)^* - \Psi(x, t)^* \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) \right]$.

散乱されている粒子を表す波動関数 $\psi(x)$ は, 次を満たすと考えられる.

- Hamiltonian の固有関数である.
- $x \rightarrow -\infty$ での漸近形が, ある波数 $k > 0$ で $\psi(x) \sim A \exp[ikx] + B \exp[-ikx]$ である (ここで, $A \exp[ikx]$ が入射波, $B \exp[-ikx]$ が反射波を表す).
- $x \rightarrow +\infty$ での漸近形が, ある波数 $k > 0$ で $\psi(x) \sim C \exp[ikx]$ である (これは透過波を表す. 粒子は負の方向から入射しているので, $D \exp[-ikx]$ のような成分はない).

無限遠 $x \rightarrow \pm\infty$ での, 入射波, 反射波, 透過波の確率流れ密度 $j_i(x = -\infty), j_r(x = -\infty), j_t(x = +\infty)$ を用いて, 反射係数 R , 透過係数 T を

$$(1) \quad R := \frac{|j_r(x = -\infty)|}{|j_i(x = -\infty)|}, T := \frac{|j_t(x = +\infty)|}{|j_i(x = -\infty)|}$$

と定義する.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

例題: 1次元での散乱問題

Potential

$$(2) \quad V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ V_0 > 0 & (x > 0). \end{cases}$$

に, $x = -\infty$ からエネルギー $E > V_0$ なる粒子が入射する散乱問題を考える. 透過係数, 反射係数を求めよ.

[4-1] 1次元での散乱問題

例題で, $0 < E < V_0$ のとき, 透過係数, 反射係数を求めよ.

[4-2] 1次元の散乱問題

1次元の potential のもとで, $x = -\infty$ の側から正の向きに入射する質量 m の粒子の散乱を考える:

$$(3) \quad V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0 : \text{領域 I}) \\ V_0 > 0 & (0 \leq x \leq a : \text{領域 II}) \\ 0 & (x \geq a : \text{領域 III}) \end{cases} .$$

1. Hamiltonian $H = p^2/2m + V(x)$ の固有値 E の固有関数を求めよ (領域 I, II, III にわけて考えよ).
2. 以下, $0 < E < V_0$ の場合を考える. 領域 III で x の正の方向に進む解 $\psi_{\text{III}}(x) = Ce^{ikx}$ ($k > 0$) を考えたとき, それに接続する領域 II での解を求めよ.
3. 上で求めた領域 II での解を接続して領域 I の解を求めよ.
4. 反射係数 R , 透過係数 T を求めよ. 確率の保存 $R + T = 1$ は成り立っているか.

[4-3] 1次元での散乱問題

Potential が

$$(4) \quad V(x) = V_0 a \delta(x)$$

である場合に, 透過係数, 反射係数を求めよ.

Hint. $x = 0$ で波動関数は, 0 階微分は連続だが, 1 階微分は不連続. その跳びの大きさは, Schrödinger 方程式の両辺を, $(-\epsilon, +\epsilon)$ で積分して求める.

参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.
- [2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.
- [3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.
- [4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.