量子力学 II 演習 問題 (第 5回)

樋口 さぶろお*

1997年11月17日

量子力学における接続条件

1. Potential が有限なら $\psi(x), \psi'(x)$ は連続.
2. Potential が無限なら $\psi(x)$ は連続, $\psi'(x)$ に有限の跳び. 跳びの大きさは無限小区間で Schrödinger 方程式を積分して求める.

例題

Potential が は有限でなめらかな関数 $U(x)$ を用いて

(1) $\quad V(x) = U(x) + V_0 a\delta(x)$

とかかれる時の, Hamiltonian の固有関数 $\psi(x)$ を考える.

1. $\psi(x)$ が $x = 0$ で連続であることを示せ.
2. $\lim_{x\to+0}\psi(x)$ と $\lim_{x\to-0}\psi(x)$ の間の関係を求めよ.

[5-1] 1 次元での散乱問題

Potential が

(2) $\quad V(x) = V_0 a\delta(x)$

である場合に, 透過係数, 反射係数を求めよ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[5-2] δ -関数 potential

Potential が

(3) $V(x) = V_0 a\delta(x)$

ただし $V_0 a < 0$, である場合に, 束縛状態を求めよ.

[5-3] 1 次元での散乱問題

Potential $V(x)$ が

$$V(x) = U(x) + V_0 a\delta(x),$$
$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0(\text{定数}) > 0 & (x > 0) \end{cases}$$

のとき, $x \to -\infty$ から入射する粒子の透過係数, 反射係数を求めよ.

[5-4] 反射係数, 透過係数の一般論

1 次元の Potential

(4) $V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > a > 0), \\ V(x) \not\equiv 0(\text{具体的な形は特定しない}) & (|x| < a). \end{cases}$

のもとでの散乱を考える． 領域 $x < -a$ での解を $A\mathrm{e}^{ikx} + B\mathrm{e}^{-ikx}$ 領域 $x > a$ での解を $C\mathrm{e}^{ikx} + D\mathrm{e}^{-ikx}$ と書く $(k \in \mathbf{R})$.

1. 線形関係

   (5) $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$

   が成り立つことを納得せよ.

2. 行列 S が unitary であること

   (6) $|S_{1i}|^2 + |S_{2i}|^2 = 1, S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* = 0$

   を示せ.

Hint. 確率保存則の積分形を領域 $[-a, a]$ に使う.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.