量子力学 II 演習 問題 (第 6回)

樋口 さぶろお*

1997 年 12 月 1 日

電磁場中の荷電粒子

電場 $\mathbf{E}$, 磁場 $\mathbf{B}$ 中の電荷 q の粒子の Hamiltonian は

$$(1) \quad H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + q\phi(\mathbf{x})$$

で与えられる．ただし, c は光速度．スカラー場 ϕ は 電場を表す静電ポテンシャル: $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. ベクトル場 $\mathbf{A}$ は磁場を表すベクトルポテンシャル: $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

量子力学では, 上の $\mathbf{p}$, $\mathbf{x}$ が演算子に置き換わったと考えればよい．ただし, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の $\mathbf{x}$ も $\mathbf{p}$ と非可換であることに注意.

[6-1]　Lorentz 力

上の状況を考える．Heisenberg 描像をとる．演算子 O_t は時間に依存し, 運動方程式

$$(2) \quad \frac{dO_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[O_t, H]$$

に従って時間発展する.

例題 演算子 $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ に対して,

$$(3) \quad m\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

を示せ. $\mathbf{p}$ を正準運動量, $\mathbf{\Pi}$ を力学的運動量とよんだりして区別する.

1. 交換関係

   (4) $\quad [\Pi_i(\mathbf{x},\mathbf{p}),\Pi_j(\mathbf{x},\mathbf{p})] = (i\hbar q/c)\epsilon_{ijk}B_k(\mathbf{x})$

   を示せ. ϵ_{ijk} は完全反対称 tensor.

2. Lorentz 力の入った, 演算子に対する量子力学的運動方程式

   (5) $\quad m\dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \dfrac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = q\left[\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \dfrac{1}{2c}\left(\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}\times\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\times\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\right]$

   を示せ.

[6-2] ゲージ変換

上の状況で, 静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}) = 0$ とする. ベクトルポテンシャルにゲージ変換 $\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\chi(\mathbf{x})$ を施しても, 磁場 $\mathbf{B}$ には変化がない. ただし $\chi(\mathbf{x})$ は実スカラー関数.

1. 交換関係

   (6) $\quad \left[\mathbf{\Pi}(\mathbf{x},\mathbf{p}), \exp\left[i\dfrac{q}{c\hbar}\chi(\mathbf{x})\right]\right] = \dfrac{q}{c}\nabla\chi(\mathbf{x})$

   を示せ.

2. $\psi(\mathbf{x})$ を, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のもとでの, 固有値 E の Hamiltonian の固有関数とする. ゲージ変換されたベクトルポテンシャル $\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\chi(\mathbf{x})$ のもとでは,

   (7) $\quad \psi'(\mathbf{x}) = \exp\left[i\dfrac{q}{c\hbar}\chi(\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x})$

   が Hamiltonian の固有関数となり, 固有値は同じ E であることを示せ.

Remark. 物理を変えないゲージ変換のもとで, 波動関数は位相だけ変化する.

[6-3]　Landau 準位

3 次元空間の質量 m, 電荷 q の粒子を考える．z 軸方向の一様な磁場のみがあるとする．すなわち, 電場 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, 磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B\mathbf{e}_z$.

1. この磁場を表すベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ をひとつかけ.

2. 交換関係 $[\Pi_x, \Pi_y]$ を求めよ.

3. Hamiltonian と交換関係は

   $$H = \frac{1}{2m}\left(\Pi_x^2 + \Pi_y^2\right) + \frac{1}{2m}\Pi_z^2, \qquad [\Pi_x, \Pi_y] = \text{定数}, \quad \text{others} = 0. \tag{8}$$

   である．x, y 方向と z 方向を別々に考えられる．この $\Pi_x^2 + \Pi_y^2$ の部分は, 1 次元の調和振動子

   $$H = x^2 + p^2, \qquad [x, p] = \text{定数}, \quad \text{others} = 0. \tag{9}$$

   と似ている．このことを利用して, エネルギー固有値が

   $$E_{k_z,n} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \frac{|qB|\hbar}{cm}\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k_z \in \mathbb{R}) \tag{10}$$

   とかけることを説明せよ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.