量子力学 II 演習 問題 (第 7回)

樋口 さぶろお*

1997 年 12 月 8 日

[7-1] ゲージ変換

上の状況で, 静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}) = 0$ とする. ベクトルポテンシャルにゲージ変換 $\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\chi(\mathbf{x})$ を施しても, 磁場 $\mathbf{B}$ には変化がない. ただし $\chi(\mathbf{x})$ は実スカラー関数.

1. 交換関係

   $$(1) \quad \left[\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \exp\left[i\frac{q}{c\hbar}\chi(\mathbf{x})\right]\right] = \frac{q}{c}\nabla\chi(\mathbf{x}) \exp\left[i\frac{q}{c\hbar}\chi(\mathbf{x})\right]$$

   を示せ.

2. $\psi(\mathbf{x})$ を, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のもとでの, 固有値 E の Hamiltonian の固有関数とする. ゲージ変換されたベクトルポテンシャル $\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\chi(\mathbf{x})$ のもとでは,

   $$(2) \quad \psi'(\mathbf{x}) = \exp\left[i\frac{q}{c\hbar}\chi(\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x})$$

   が Hamiltonian の固有関数となり, 固有値は同じ E であることを示せ.

Remark. 物理を変えないゲージ変換のもとで, 波動関数は位相だけ変化する.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[7-2] Zeeman 効果

3 次元空間の質量 m, 電荷 q の粒子を考える. 中心力ポテンシャル $V(r)$ と, z 軸方向の一様な磁場のみがあるとする. すなわち, 電場 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, 磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B\mathbf{e}_z$.

1. ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$ は, この磁場を表すことを示せ.
2. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}BL_z$ を示せ. ただし L_z は z 方向の角運動量.
3. Hamiltonian が

   $$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(r) - \frac{q}{2mc}BL_z + \frac{q^2}{8mc^2}B^2(x^2+y^2) \tag{3}$$

   であることを示せ.
4. $B = 0$ のとき, 全角運動量演算子 $\mathbf{L}^2$ の固有値 $\ell(\ell+1)\hbar^2$ の固有状態は, $(2\ell+1)$ 重に縮退している. 磁場 B が加わったとき, この縮退はどのようにとけるか. 縮退のある場合の 1 次の摂動論を用いて議論せよ. ただし, ∇^2 の極座標表示は

   $$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\mathbf{L}^2 \tag{4}$$

[7-3] Zeeman 効果

3 次元空間の質量 m, 電荷 q の粒子を考える. z 軸方向の一様な磁場のみがあるとする. すなわち, 電場 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, 磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B\mathbf{e}_z$.

1. 交換関係 $[\Pi_x, \Pi_y]$ を求めよ.
2. Hamiltonian と交換関係は

   $$H = \frac{1}{2m}\left(\Pi_x^2 + \Pi_y^2\right) + \frac{1}{2m}\Pi_z^2, \qquad [\Pi_x, \Pi_y] = \text{定数}, \quad \text{others} = 0. \tag{5}$$

   である. x, y 方向と z 方向を別々に考えられる. この $\Pi_x^2 + \Pi_y^2$ の部分は, 1 次元の調和振動子

   $$H = x^2 + p^2, \qquad [x, p] = \text{定数}, \quad \text{others} = 0. \tag{6}$$

と似ている. このことを利用して, エネルギー固有値が

$$(7) \qquad E_{k_z,n} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \frac{|qB|\hbar}{cm}\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k_z \in \mathbb{R})$$

とかけることを説明せよ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.