量子力学 II 演習 問題 (第 10回)

樋口 さぶろお*

1997 年 1 月 12 日

スピンと統計性

- s をスピン変数とすると, スピンのある粒子の波動関数は $\psi(\mathbf{x}, s)$ のようになる.
- 量子力学では, 同種粒子は区別できない.
- ξ_i を, i-番めの粒子のスピン座標, 空間座標を合わせたものとする. 多粒子の波動関数は

  $$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n) = \pm\psi(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n) \tag{1}$$

  を満たさなければならない. ただし $\pm$ は, 粒子がそれぞれ boson であるか fermion であるかに対応する.
- スピンが整数の粒子は boson, 半奇数の粒子は fermion.

例題: 角運動量の合成

Spin 1/2 を持つ 2 つの fermion $i = 1, 2$ があり, その spin 演算子を $\mathbf{S}_i = (S_{ix}, S_{iy}, S_{iz})$ とかく. $\mathbf{S}_i^2$ と S_{iz} の同時固有状態を $v_{i\pm}$ とする. すなわち

$$\mathbf{S}_i^2 v_{i\pm} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\hbar^2 v_{i\pm} \tag{2}$$

$$S_{iz} v_{i\pm} = \pm\frac{\hbar}{2} v_{i\pm} \tag{3}$$

* hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, Komaba bldg 16, room 809B, Hikami Lab., Phone: (03)54.54.67.35

とする (いわば, $v_\pm \equiv \psi_{\frac{1}{2}\ \pm\frac{1}{2}}$). 演算子 $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ を $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ と定義する.

1. 状態 $v_{1\pm}v_{2\pm}$ (複号同順でない) のうち, $\mathbf{S}^2, S_z$ の同時固有関数であるものはどれか. 式

   $$(4) \qquad 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} + 2S_{1z}S_{2z}$$

   が有用かもしれない ($S_\pm := S_x \pm \sqrt{-1}S_y$).

2. 上の spin 波動関数の適当な線形結合をとって, $\mathbf{S}^2, S_z$ の同時固有関数を作れ.

3. それらの状態のうち, 粒子の交換について対称, 反対称であるものはそれぞれどれか.

[10-1] 多粒子の量子力学

内部自由度のない 2 つの Bose 粒子が 1 次元の調和振動子ポテンシャルの中で運動している:

$$(5) \qquad H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2).$$

1. 2つの粒子が区別できるとき, 2粒子系のエネルギー固有状態 $\Psi(x_1, x_2)$ とエネルギー固有値を求めよ. ただし, 1粒子の調和振動子の固有関数 $\psi_n(x)$ とエネルギー固有値 $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ を用いて表せばよい. (i.e. Hermite 多項式の具体的な形は書かなくてよい).

Hint. 変数分離.

2. 2つの粒子が同種粒子で区別できないとき, 2粒子系のエネルギー固有状態 $\Psi(x_1, x_2)$ とエネルギー固有値を求めよ. ただし, 上と同様に $\psi_n(x)$ と E_n で書けばよい.

Hint. 対称化.

[10-2]　Spin 波動関数と空間波動関数

質量 m の spin 1/2 fermion が, 1 次元の potential

$$(6)\quad V(x)=\begin{cases}0 & (0<x<L)\\ \infty & (x<0, L<x)\end{cases}$$

のもとで運動している (spin 座標は Hamiltonian に現れない).

1. 粒子が 1 個のとき, エネルギー固有関数とエネルギー固有値を求めよ.
2. 2 個の同一粒子の場合を考える. Spin triplet state にあるという前提のもとでの, エネルギーが最低の状態を求めよ.
3. 2 個の同一粒子の場合を考える. Spin singlet state にあるという前提のもとでの, エネルギーが最低の状態を求めよ.

[10-3]　3 個の spin 1 boson

Spin 1 自由 boson 3 個からなる系を考える.

1. 3 粒子の波動関数の空間部分が完全対称であることがわかっているとする. Spin 波動関数を $|+\rangle|0\rangle|+\rangle$ などと表記する. 次の 3 つの場合について, 規格化された 3 粒子の spin 波動関数を作れ.
    - 3 粒子とも $|+\rangle$ で表される状態にある.
    - 2 粒子とも $|+\rangle$, 1 粒子が $|0\rangle$ で表される状態にある.
    - 3 粒子が異なる状態にある.
2. 3 粒子の波動関数の空間部分が完全反対称であることがわかっているとする. 上の 3 つの場合のうち, 可能な場合に 3 粒子の spin 波動関数を作れ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.