

## 量子力学 II 演習 問題 (第 12 回)

樋口 さぶろお\*

1997 年 1 月 26 日

### 水素原子

Bohr 半径を  $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/e^2m$  とするとき, 水素原子中の電子のエネルギー固有状態

$$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r)\Theta_{\ell m}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

は主量子数  $n$ , 方位量子数  $\ell$ , 磁気量子数  $m$  で特徴づけられる. ただし  $n \geq \ell + 1, \ell \geq 0, -\ell \leq m \leq \ell$ . ここで, スピンは無視した. 上の波動関数それぞれに, 上向き, 下向きのスピン波動関数との積を考えることができる. なお,

$$\Phi_m(\phi) = (2\pi)^{-1/2}e^{im\phi},$$

$$\Theta_{00}(\theta) = 2^{-1/2}, \quad \Theta_{10}(\theta) = (3/2)^{1/2}\cos\theta, \quad \Theta_{1,\pm 1}(\theta) = \mp(3/4)^{1/2}\sin\theta,$$

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}, \quad R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}a_0^{3/2}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/2a_0},$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}$$

など. エネルギーは  $n$  のみに依存し,

$$(1) \quad E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2n^2}$$

動径方向の積分に有用な公式として

$$\int_0^\infty dx e^{-ax} x^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{a^{\alpha+1}}.$$

---

\*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,  
Komaba bldg 16, room 809B, Hikami Lab., Phone: (03)54.54.67.35

[12-1] 水素原子

$(n, \ell) = (2, 1)$  について, 軌道の平均 2 乗半径  $\langle r^2 \rangle$  を求めよ.

[12-2] 水素原子

$(n, \ell, m) = (2, 1, 1)$  に対して, 期待値  $\langle z \rangle, \langle z^2 \rangle$  を求めよ.

[12-3] 水素原子

$(n, \ell) = (1, 0)$  について, ポテンシャルエネルギー, 運動エネルギーの期待値  $\langle U(r) \rangle, \langle \mathbf{p}^2/2m \rangle$  を求めよ.

[12-4] 1 次の Stark 効果

水素原子中の電子の, 第一励起状態  $n = 2$  は 4 重に縮退している. すなわち,  $(\ell, m) = (0, 0), (1, 0), (1, -1), (1, +1)$  である.

弱い電場を  $z$  方向に加えた時のエネルギーの準位の変化を摂動論を用いて計算する.

1. 電場の大きさを  $E$  とするとき, Hamiltonian に加えるべき摂動項が

$$V = eEz = eEr \cos \theta$$

であることを納得せよ.

2. 縮退のある場合の摂動論を用いるので, 行列要素  $\langle \ell', m' | V | \ell, m \rangle$  を計算して対角化する. まず

$$\langle \ell', m' | V | \ell, m \rangle \propto \delta_{m, m'}$$

を示せ.

3. 摂動によるエネルギー準位の変化を求めよ.

## 参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

- [2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.
- [3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.
- [4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).  
訳書は吉岡書店.
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書  
は吉岡書店.