

# 量子力学 II 演習問題 (第 13 回)

樋口 さぶろお\*

1998 年 2 月 2 日

## [13-1] 1 次の Stark 効果 (電場中の水素原子)

水素原子中の電子の第一励起状態  $n = 2$  は, スピンを無視すると 4 重に縮退している. すなわち,  $(\ell, m) = (0, 0), (1, 0), (1, -1), (1, +1)$  である.

弱い電場を  $z$  方向に加えた時のエネルギーの準位の変化を摂動論を用いて計算する.

1. 電場の大きさを  $E$  とするとき, Hamiltonian に加えるべき摂動項が

$$V = eEz = eEr \cos \theta$$

であることを納得せよ.

2. 縮退のある場合の摂動論を用いるので, 行列要素  $\langle \ell', m' | V | \ell, m \rangle$  を計算して対角化する. まず

$$\langle \ell', m' | V | \ell, m \rangle \propto \delta_{m, m'}$$

を示せ.

3. 摂動によるエネルギー準位の変化を求めよ.

---

\*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,  
Komaba bldg 16, room 809B, Hikami Lab., Phone: (03)54.54.67.35

[13-2] 磁場中の水素原子

水素原子の  $z$  軸方向に, 大きさ  $H$  の弱い磁場をかける. このとき, 電子の Hamiltonian に加えるべき摂動項は (スピン-軌道相互作用を無視すると),

$$(1) \quad V = \epsilon(L_z + 2S_z)$$

である.  $\epsilon$  は磁場の 1 次に比例する定数.

水素原子の第一励起状態  $2s, 2p$  の (スピンまでこめて) 8 つの状態は縮退している. これが上の摂動のもとでどのように分裂するか, 摂動の 1 次で考えよ.

[13-3] スピン-軌道相互作用

波動関数  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)\sigma_{\pm}(s)$  は,  $L^2, S^2, L_z, S_z$  の同時固有関数. 一方,  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  と定義すると, 次の波動関数  $\chi_{j,m}$  は,  $L^2, S^2, J^2, J_z$  の固有状態であることが知られている ( $J^2$  の固有値  $j(j+1)\hbar^2$ ,  $J_z$  の固有値  $m\hbar$ ).

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} &= Y_{1,1}\sigma_+, \\ \chi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} &= 3^{-1/2}(\sqrt{2}Y_{1,0}\sigma_+ + Y_{1,1}\sigma_-), \\ \chi_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} &= 3^{-1/2}(\sqrt{2}Y_{1,0}\sigma_- + Y_{1,-1}\sigma_+), \\ \chi_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} &= Y_{1,-1}\sigma_-, \\ \chi_{\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} &= 3^{-1/2}(Y_{1,0}\sigma_+ - \sqrt{2}Y_{1,1}\sigma_-), \\ \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} &= 3^{-1/2}(Y_{1,0}\sigma_- - \sqrt{2}Y_{1,-1}\sigma_+). \end{aligned}$$

水素原子の  $z$  軸方向に, 弱い磁場をかけると, 摂動項

$$(2) \quad V = \epsilon\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

が現れることが知られている. ただし,  $\mathbf{L}, \mathbf{S}$  は軌道, スピン運動量.

電子の  $2p$  軌道のエネルギー固有状態の分裂を考える ( $2s$  との混合は考えなくてよいことが知られている). 式  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)$  を利用して, 分裂の様子を求めよ.

[13-4] 変動する電場による励起

水素原子中の電子を考える。電子は時刻  $t = 0$  で基底状態  $1s$  にあった。時間に依存する  $z$  軸方向の電場

$$(3) \quad E(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E_0 e^{-\alpha t} & (t \geq 0) \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

が加えられた。十分時間がたった後に、電子が  $2s, 2p$  状態にある確率を、摂動論の 1 次で求めよ。

ただし、時刻  $t = 0$  で系が状態  $\psi_n$  にあったとき、時刻  $t$  での状態  $s$  の振幅は、摂動論の 1 次で

$$(4) \quad a_s(t) = \delta_{sn} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \lambda \langle \psi_s | V(t') | \psi_n \rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_s)t'\right).$$

なのだった。

## 参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.
- [2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.
- [3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.
- [4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.