

ランダムウォークの境界条件・状態空間が大きく規則的なマルコフ連鎖の数値計算

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L07(2021-05-20 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-05-19 Wed 14:22 JST hig"

今日の目標

- 反射, 吸収, 周期壁の境界条件を説明できる
- 2次元配列を使わずに, `multiply_trans` が書ける



L06-Q1

Quiz 解答:マルコフ連鎖の時間発展

- ① $\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- ② 転置推移確率行列 M の固有値 1 の固有ベクトル \vec{u} を (あるなら) 求めればよい. $M\vec{u} = \vec{u}$ を解いて, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} s$ ($s \neq 0$). 定常分布は, 規格化された $\vec{u} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- ③ 転置推移確率行列 M の固有値 (絶対値の大きさの順に) λ_1, λ_2 , 対応する固有ベクトル \vec{u}_1, \vec{u}_2 を求めると,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{6}, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} s, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} s \quad (s \neq 0).$$

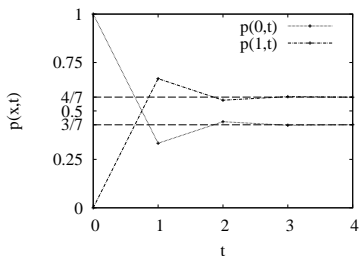
固有方程式には解 $\lambda_1 = 1$ があることが最初からわかっているから, 因数分解は楽.

\vec{u}_1, \vec{u}_2 とも $s = 1$ に固定する (他の取り方をしても最終的には同じ $\vec{p}(t)$ が求まる). このとき, $\vec{p}(0) = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ で係数 a, b を決めると, $a = \frac{1}{7}, b = \frac{4}{7}$.

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) &= M^t \vec{p}(0) \\ &= M^t (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) \\ &= \lambda_1^t a\vec{u}_1 + \lambda_2^t b\vec{u}_2 \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t.\end{aligned}$$

\vec{u}_1 の係数が $\frac{1}{7}$ である (=この項が確率ベクトルである) ので, $t \rightarrow +\infty$ でも $\vec{p}(t)$ が確率ベクトルでありつづけることが確認できる. (固有値が $\lambda = 1, -\frac{1}{6}$ となった時点で, 第1項が確率ベクトルになるはず, ということから, 1次方程式を解かずに $a = \frac{1}{7}$ と決められたはずだった).

時間変化. $|\lambda_2| = \frac{1}{6} < 1$ なので, $\vec{p}(t) \rightarrow \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ($t \rightarrow +\infty$)

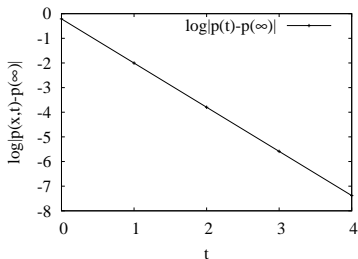


- ④ 極限分布 $\vec{p}(\infty) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ との差の大きさ (ベクトルの長さ) を考えると,

$$\begin{aligned} |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| &= \left| \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t \right| \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^t \end{aligned}$$

$$\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| = t \times \log \frac{1}{6} + \log \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

よって, t 対 $\log |\text{差}|$ のグラフを描くと, 傾き $\log |\text{第2固有値}| (< 0)$ の直線になるはず。



状態空間が3点以上からなり、(第2固有値より絶対値が小さい)第3固有値以降がある場合も、 t が大きいところではこの直線に近づいていく。

さらに t を大きくすると、 $|\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ が桁落ちしたり、数値的に0とみなされるなどで、直線から外れる。

5

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t$$

L07-Q2

Quiz 解答:マルコフ連鎖の定常分布

- ① 固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルである確率ベクトルは $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のみであり、これが唯一の定常分布

②

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^t$$

- ③ 式でまともに計算すると、固有ベクトルの内積 $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3$ とか出てきてたいへん、だけど、 $t \rightarrow +\infty$ では、 $\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)$ の第3項が(第2項と比べて)無視できて、

$$\begin{aligned} \log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| &= \log \left| -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{3}{4}\right)^t \right| + \text{もっと小さい項} \\ &= t \log \frac{3}{4} + \log \frac{\sqrt{2}}{6} + \text{もっと小さい項} \end{aligned}$$

となる.

L07-Q3

Quiz 解答:マルコフ連鎖の母期待値の時間発展

- ① 分布の時間発展は,

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t.$$

母期待値は

$$\begin{aligned} E[e^{X(t)}] &= \sum_{x=0}^1 e^x \cdot p(x, t) \\ &= e^0 \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^t \right) + e^1 \left(\frac{4}{7} + \frac{-4}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^t \right) \\ &= \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7} e \right) + \frac{4}{7} (1 - e) \left(-\frac{1}{6}\right)^t \end{aligned}$$

今の場合には極限分布が定常分布なので、母期待値も、 $t \rightarrow +\infty$ で定常分布 $\vec{u}_1 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ の母期待値 $e^0 \cdot \frac{3}{7} + e^1 \cdot \frac{4}{7}$ に収束する。

2

$$\begin{aligned}
 P(X(t) > 0) &= E[I_{[X>0]}(X)] = (0 \ 1)\vec{p}(t) \\
 &= p(1, t) = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^t
 \end{aligned}$$

L06-Q4

Quiz 解答:可約なマルコフ連鎖の定常状態

固有値 $\lambda = 1$ (重解) に対応する固有ベクトルは,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} k$ ($s \neq 0$ または $k \neq 0$). 固有値 1 なので, 線形独立な確率ベクトルを 1 組選ぶと便利 (他の選び方でも最終的な結果は変わらない) で, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると, $s\vec{u}_1 + (1-s)\vec{u}_2$ ($0 \leq s \leq 1$) は定常分布.

固有値 $\lambda = \frac{1}{3}$ に対する固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} s$ ($s \neq 0$). 確率ベクトルにはなりえないので, 適当に非零ベクトルをひとつ選んで (他の選び方でも最終的な結果は変わらない), $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{p}(0)$ が一般の場合の時間発展は

$$\vec{p}(t) = a\vec{u}_1 1^t + b\vec{u}_2 1^t + c\vec{u}_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t.$$

- ① $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から a, b, c を定めて,

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{4}\vec{u}_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

極限分布 $\vec{p}(\infty) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は定常分布のひとつ.

- ② $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ から a, b, c を定めて,

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{3}\vec{u}_1 + \frac{2}{3}\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

極限分布 $\vec{p}(\infty) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は定常分布のひとつ.

- ③ $\{0\}$ と $\{1, 2\}$ が分かれた推移図. すなわち, 可約なマルコフ連鎖である.

L06-Q5

Quiz 解答:マルコフ連鎖

- ① 推移確率行列 T の固有値 λ , 固有ベクトルを求めると,

$$\lambda = 1, \omega, \omega^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} s \quad (s \neq 0)$$

定常分布は $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルで, 確率ベクトルになるように s を定めると, $\vec{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- ② 他の固有値 $\lambda = \omega, \omega^2$ は, $|\omega| = |\omega^2| = 1$ を満たす. よって, 一般には極限分布は存在しない.
 極限分布が存在するのは, $\vec{p}(0) = \vec{u}_1 = \vec{p}(t)$ のように最初から定常分布であったときに限られる.
- ③ 3 個の状態が 1 方向に回るような推移図.

L06-Q6

Quiz 解答:周期的なマルコフ連鎖の定常状態

- ① 固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s$ ($s \neq 0$).
 確率ベクトルになるように s を選んで, $\vec{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が定常分布.
 なお, 固有値 -1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} s$ ($s \neq 0$).
 適当に s を選んで, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく,
 一般に $\vec{p}(t) = a\vec{u}_1 1^t + b\vec{u}_2 \cdot (-1)^t$.
- ② $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ から a, b を定めると $\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + \frac{1}{6}\vec{u}_2 \cdot (-1)^t$. 振動するので極限分布は存在しない.

- ③ $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ から a, b を定めると $a = 1, b = 0$ で $\vec{p}(t) = \vec{u}_1$. 極限分布は $\vec{p}(\infty) = \vec{u}_1$ であり定常分布.

ランダムウォークの2つの表現

1 確率シミュレーション

rw*,sim*

ラグランジュ表現

$$X(t) = X(t-1) + R(t), \quad \text{乱数 } P(R(t) = \pm 1) = \frac{1}{2}. \quad P(X(3) = 9) = 1.$$

$$\downarrow P(X(t) = x) = p(x, t)$$

2 マルコフ連鎖の分布の厳密数値計算

markov*

オイラー表現

$$p(x, t) = \frac{1}{2}p(x-1, t-1) + \frac{1}{2}p(x+1, t-1). \quad p(x, 3) = \begin{cases} 1(x=9) \\ 0(\text{他}) \end{cases}$$

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1), \quad \vec{p}(3) = \dots$$

ずっと、 $-\infty < X(t) < +\infty$ のつもりで考えていた. 計算機で表現できる?

1 2 int x がオーバーフローするとだめ

2 $p(x, t) = \text{double } p[m]$ で、 $0 \leq x < m$ の範囲しか対応できない. \rightsquigarrow m を大きくとって、範囲をずらせば? \rightsquigarrow しょせんメモリーには上限.

2 ベクトル \vec{p} の上下端, 行列 M の上下左右端のところをどうする?

端で困る

$$S = \{0, 1, \dots, m - 1\}.$$

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t - 1)$$

$x = 0, x = m - 1$ にいるウォーカーが、左(右)に飛ぼうとしたときどうする? \rightsquigarrow とりあえず無視したのが下の M .

$$h = \frac{1}{2}, m = 6.$$

$$\begin{pmatrix} p(0, t) \\ p(1, t) \\ \vdots \\ p(m-2, t) \\ p(m-1, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0, t-1) \\ p(1, t-1) \\ \vdots \\ p(m-2, t-1) \\ p(m-1, t-1) \end{pmatrix}$$

転置確率行列になってない! 推移図を描いてみよう

ランダムウォークの端スペシャルルール=境界条件

端 $x = 0, m - 1$ での特定のルール=境界条件 壁はウォーカーにとっての言葉

- $x = -1, m$ は実在しない空想上の場所 (配列としても確保しない)
- $x = -1, 0$ の間に**壁**があり $x = 0$ では特別なことが起こる
- $x = m - 1, m$ の間に**壁**があり $x = m - 1$ では特別なことが起こる
- **反射壁** $x = 0$ から $x = -1$ に移ろうとすると $x = 0$ にもどされる。
- **周期 '壁'** $x = 0$ から $x = -1$ に移ろうとすると $x = m - 1$ に飛ばされる (**ワープ**). $x = -1$ と $x = m - 1$ は同じ場所。
- **吸収壁** $x = 0$ を訪れたウォーカーは壁に吸着され動けなくなる。

↪ $X(t)$ の漸化式や M を境界条件に合わせて修正。



反射壁を転置推移確率行列 M の言葉で言うと?

- **反射壁** $x = 0$ から $x = -1$ に移ろうとすると $x = 0$ にもどされる.
 $x = m - 1$ から $x = m$ に移ろうとすると $x = m - 1$ にもどされる.



転置推移確率行列を修正しよう.

$$\begin{pmatrix} h & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & h \end{pmatrix}$$

ノイマン境界条件 (現象の数理 A), $\frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = \text{指定}$, 自由端 (現象の数理 B)

周期壁を転置推移確率行列 M の言葉で言うと?

- 周期 '壁' $x = 0$ から $x = -1$ に移ろうとすると $x = m - 1$ に飛ばされる (ワープ). $x = m - 1$ から $x = m$ に移ろうとすると $x = 0$ に飛ばされる. $x = -1$ と $x = m - 1$ は同じ場所.



転置推移確率行列を修正しよう.

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 & 0 & h \\ h & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & h \\ h & 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

周期境界条件, $p(0, t) = p(m - 1, t)$

吸収壁を転置推移確率行列 M の言葉で言うと?

- **吸収壁** $x = 0, m - 1$ を訪れたウォーカーは壁に吸着され動けなくなる.



転置推移確率行列を修正しよう.

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 1 \end{pmatrix}$$

ディリクレ境界条件 (現象の数理解 A) の一種, $p(0, t) = \text{指定}$, 固定端 (現象の数理解 B)

L07-Q1

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の転置推移確率行列)

状態空間 $\{x\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 上のランダムウォークの座標 $X(t)$ が, 次の漸化式で定まる.

$$X(t) = X(t-1) + R(t), \quad (t = 1, 2, \dots)$$

ここで, $R(t)$ ($t = 0, 1, 2, \dots$) は独立同分布

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} \frac{1}{7} & (r = -1) \\ \frac{4}{7} & (r = 0) \\ \frac{2}{7} & (r = +1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう確率変数である.

ただし, $x = 0, 4$ が吸収壁であるとする. これをマルコフ連鎖として考える.

- ① 転置推移確率行列 M を書こう.
- ② 推移図を書こう.

ここまで来たよ

⑦ マルコフ連鎖の確率と母期待値の時間発展

- ⑦ ランダムウォークの境界条件・状態空間が大きく規則的なマルコフ連鎖の数値計算
 - 状態空間が大きく規則的なマルコフ連鎖の時間発展の数値計算

マルコフ連鎖の時間発展の数値計算

$x = 0, \dots, m - 1$ の m 個の状態のあるマルコフ連鎖を考える。

分布 $\vec{p}(t)$, $p(x, t) \rightarrow$

```

1  double p[m]={1.0,0.0,...,0.0}; /*配列. mは整数.*/
2  /* {p(0,t), p(1,t), p(2,t),...,p(m-1,t)} */

```

転置推移確率行列 $M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \rightarrow$

```

1  double M[][m]= {{0.1,0.3},
2  {0.9,0.7}}; /* 2次元配列 */

```

$\{\{p_{00}, p_{01}\},$
 $\{p_{10}, p_{11}\}\}$

行列とベクトルの積

$$\vec{q} = M\vec{p} \rightarrow q_x = \sum_y M_{xy}p_y.$$

```

1  p[] を p(x,0) で初期化;
2  p を出力;
3  for (t){
4      pn=M p; /*行列とベクトルの積*/
5      p=pn;
6      p を出力;
7  }

```

サンプル <https://www.data.math.ryukoku.ac.jp/course/>

compscib 2020/p/markov01/src/markov01sample.c

状態数が大きく規則的なマルコフ連鎖の時間発展の数値計算

例: ランダムウォークや偏微分方程式

マルコフ連鎖の数値計算を使って, 解こう.

$-\infty < x < +\infty$ とは言えないけど, $\bar{p}(t)$ は 100 次元くらいで.

L07-Q2

Quiz(ランダムウォークの時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ, 状態空間 $S = \{x\} = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

```
1 double p[m], q[m];
```

で表される \bar{p}, \bar{q} に対して, 入力 \bar{p} を受け取り $\bar{q} = M\bar{p}$ を計算する関数

```
1 int multiply_trans(double q[], double p[], int m);
```

を書こう. 行列 M を 2次元配列で表現せず, M の規則性を利用して (=加算や代入の回数が $O(m^2)$ でなく $O(m)$ となるように) 書くこと.

次元 m が小さいとき

```

1  int multiply_trans(double q[], double p[], int m){
2  int x,y;
3  double M[][NS]={ {0.0,1.0,0.0, /*略*/ ,0, } };
4  for (x=0;x<m;x++){
5      q[x]=0;
6      for (y=0;y<m;y++){
7          q[x]+=M[x][y]*p[y];
8      }
9  }
10 return 1;
11 }
```

Quiz 解答: ランダムウォークの時間発展

ソースコード 1: 疎な転置推移確率行列

```

1  int multiply_trans(double q[], double p[], int m){
2  int x;
3  for (x=0;x<m-1;x++){
4      q[x]=/*...+0.0*p[x-1]+0.0*p[x]+*/1.0*p[x+1]/*+0.0*p[x+2]+...*/;
5  }
6  q[m-1]=1.0*p[0]
7  return 0;
8  }
```

$$\vec{q} = M\vec{p}.$$

$$q_x = \sum_{y=0}^{m-1} M_{xy}p_y \stackrel{\text{今の場合}}{=} 0 + \dots + 0 + 1 \times p_{x+1} + 0 + \dots + 0 \quad (x < m-1).$$

疎行列 sparse matrix ほとんどの成分が 0 な行列. 2次元配列でなく, 上のような表現方法をとったほうがよい.

C の配列の復習

```
1 double u[10]; /*宣言*/  
2  
3 int u[]={0,2,3,1,0,0,0,0,0,0}; /*宣言兼代入*/
```

$u[0], u[1], \dots, u[9]$ が使える.

$u[-1], u[10]$ にアクセスすると不吉なことが起こる.

代入する前は、値が 0 である保証はもちろんない.

L07-Q3

Quiz(大きな転置推移確率行列をかける関数)

次の推移確率行列を持つ, 状態空間 $\{x\} = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{10} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} & 0 & & \vdots \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \frac{2}{10} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{3}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix}.$$

```
1 | double p[m], q[m];
```

で表される \vec{p}, \vec{q} に対して, 入力 \vec{p} を受け取り $\vec{q} = M\vec{p}$ を計算する関数

```
1 | int multiply_trans(double q[], double p[], int m);
```

を書こう. 行列 M を 2次元配列で表現せず, M の規則性を利用して書くこと.