

ランダムウォークのパスの母ナントカの推定・数理モデル・ チームプロジェクト

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L11(2021-06-17 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-06-17 Thu 14:53 JST hig"

今日の目標

- サンプルパスの母ナントカを推定するプログラムを書ける
- 日本語の状況をランダムウォークの数式で書ける (数理モデルとして定式化できる)



L10-Q1 L10-Q2

Quiz 解答: 確率変数の変換

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \text{ なので,}$$

①

$$E[R] = E[2\sqrt{Y}] = \int_0^1 2\sqrt{y} \, dy = \frac{4}{3}.$$

$$V[R] = E[R^2] - (E[R])^2 = E[4Y] - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

- ② $R = 2\sqrt{Y}$ を解くと, $y = (r/2)^2$ ($0 \leq y < 1, 0 \leq r < 2$) なので,
 $P(0.2 < R < 0.8) = P(0.01 < Y < 0.16) = 0.15.$

③

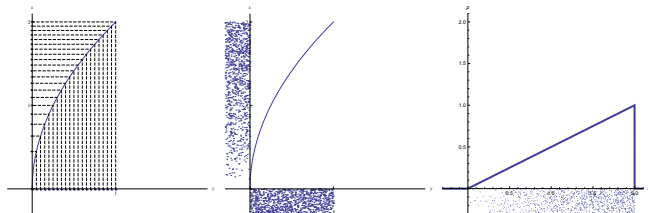
$$P(R < r) = P(Y < (r/2)^2) = \begin{cases} 0 & (r < 0) \\ r/2 & (0 \leq r < 2) \\ 1 & (2 \leq r) \end{cases}$$

4

$$F_R(r) = \int_0^r f_R(s) ds = (r/2)^2 \quad (0 \leq r < 2)$$

より, 両辺を微分して,

$$f_R(r) = \begin{cases} r/2 & (0 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



L11-Q3

Quiz 解答: 確率変数の変換

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \quad \text{なので,}$$

1

$$\begin{aligned} E[R] &= E[e^Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^y f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 e^y \cdot 0 dy + \int_0^1 e^y \cdot 1 dy + \int_1^{+\infty} e^y \cdot 0 dy \\ &= 0 + (e^1 - 1) + 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[R] &= E[R^2] - (E[R])^2 \\ &= E[e^{2Y}] - (E[e^Y])^2 \\ &= \int_0^1 e^{2y} \cdot 1 dy - (e^1 - 1)^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e^1 - 1)^2 \end{aligned}$$

- ② $r \leq 1$ のとき, $P(R < r) = 0$.
 $1 < r < e$ のとき,

$$\begin{aligned} P(R < r) &= P(Y < \log r) = E[\mathbf{I}_{[\log Y < r]}(Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\log r} f_Y(y) \, dy = \log r \end{aligned}$$

$e \leq r$ のとき, $P(R < r) = 1$ よって,

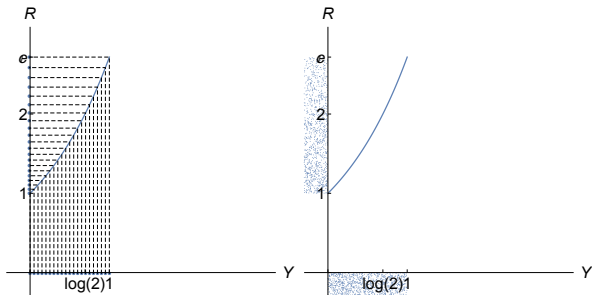
$$F_R(r) = \begin{cases} 0 & (r < 1) \\ \log r & (1 \leq r < e) \\ 1 & (e \leq r) \end{cases}$$

3

$$\int_{-\infty}^r f_{\mathbf{R}}(r) \, dr = F_{\mathbf{R}}(r)$$

より, 両辺を微分して,

$$f_{\mathbf{R}}(r) = \begin{cases} 1/r & (1 \leq r < e) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



L11-Q4

Quiz 解答: 確率変数の変換

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & (c \leq r < d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

ここまで来たよ

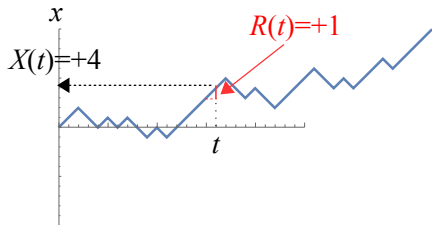
11 連続型確率変数の変換

11 ランダムウォークのパスの母ナントカの推定・数理モデル・チームプロジェクト

- サンプルパス
- サンプルパスの推定のプログラム
- 数理モデル
- チームプロジェクト 1

パスから決まる母期待値

$X(T)$: 時刻 T のランダムウォーカーの座標 (を確率変数とみたもの)
 $(X(0), X(1), X(2), \dots, X(T))$: パス (path) (を確率変数の $(T + 1)$ 個組とみたもの) ってみれば確率変数ベクトルだよね.
 サンプルパス: その実現値.



パスの量の母期待値・母比率

1個の座標 $X(t)$ でなく、パス $X(0), X(1), \dots, X(T)$ から計算される母ナントカがある。

母期待値 $E[\max_t X(t)]$

$\phi_1((X(t))_{0 \leq t \leq T}) = \max_t X(t) = X(t)$ の最大値. (m)

母比率 $P(\max_t X(t) > 120)$

$\phi_2((X(t))_{0 \leq t \leq T}) =$

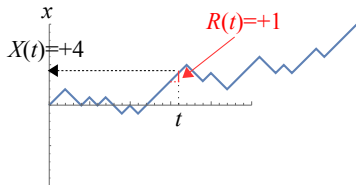
$I_{[\max_t X(t) > 120]}((X(t))_{0 \leq t \leq T}) = (X(t)$ の最大値が 120 より大きければ 1, そうでなければ 0).

時刻の母期待値 $E[\arg \max_t X(t)]$

$\phi_3((X(t))_{0 \leq t \leq T}) = \arg \max_t X(t) = (X(t)$ が最大であるような t). 複数でない
と仮定. (分(時刻))

持続時間の母期待値

$\phi_4((X(t))_{0 \leq t \leq T}) = (\text{条件 } X(t) > 0 \text{ が続けて成立した最大時間})$ (分(時間))



ここまで来たよ

11 連続型確率変数の変換

11 ランダムウォークのパスの母ナントカの推定・数理モデル・チームプロジェクト

- サンプルパス
- サンプルパスの推定のプログラム
- 数理モデル
- チームプロジェクト 1

プログラム (ϕ_2 , ϕ_3 の例) I

```
1 おまじない
2 double getuniform();
3 double getrandom(double y);
4
5 int phi2(double path[],int tend);
6 int phi3(double path[],int tend);
7
8 int main(){
9     int t,tmax;
10    int n,nmax;
11    int seed;                /* 疑似乱数のシード */
12    double x;
13    double path[TMAX];
14    double xstart=110.0;
15
16    scanf("%d",&seed);  scanf("%d",&tmax);  scanf("%d",&nmax);
17    srand(seed);        /* シードの設定 */
18
19    printf("#d=%d\n#T=%d\n#N=%d\n",seed,tmax,nmax);
20
21
22    for(t=0;t<=tmax;t++){
23        printf("%d,□",t);
24    }
25    printf("phi2,phi3\n");
26
27
```

プログラム (ϕ_2, ϕ_3 の例) II

```

28 for(n=0;n<nmax;n++){
29     x=xstart;                               /* 初期条件 */
30     t=0;
31     path[t]=x;
32     printf("%f",x);
33     for(t=1;t<=tmax;t++){
34         x=x+getrandom(getuniform());
35         path[t]=x;
36         printf("%f",x);
37     }
38     printf("%d",phi2(path,tmax));
39     printf("%d\n",phi3(path,tmax));
40 }
41 return 0;
42 }
43
44 /* [0,1) 疑似乱数を返す */
45 double getuniform(){
46     return rand()/(RAND_MAX+1.0);
47 }
48
49 /* U(-5,5) 連続型一様乱数 */
50 double getrandom(double y){
51     return -5+10*y;
52 }
53
54 int phi2(double path[], int tend){
55     double xmax0=120.0;

```

プログラム (ϕ_2 , ϕ_3 の例) III

```
56 double xmax=path[0];
57 int t;
58 for(t=0;t<=tend;t++){
59     if(path[t]>xmax){
60         xmax=path[t];
61     }
62 }
63 if(xmax>xmax0){
64     return 1;
65 } else {
66     return 0;
67 }
68 }
69
70 int phi3(double path[], int tend){
71     double xmax;
72     int t;
73     int tmax;
74
75     xmax=path[0];
76     tmax=0;
77     for(t=0;t<=tend;t++){
78         if(path[t]>xmax){
79             xmax=path[t];
80             tmax=t;
81         }
82     }
83     return tmax;
```

プログラム (ϕ_2, ϕ_3 の例) IV

84 | }

L11-Q1

Quiz(サンプルパスの関数)

ランダムウォークのサンプルパス $x(0), \dots, x(T)$ を長さ $T + 1$ の配列 `double path[]` に対して, 120 に一番近い座標を返す関数 `double phi(double path[], int T)` を書こう.

ここまで来たよ

11 連続型確率変数の変換

11 ランダムウォークのパスの母ナントカの推定・数理モデル・チームプロジェクト

- サンプルパス
- サンプルパスの推定のプログラム
- **数理モデル**
- チームプロジェクト 1

日本語を式に変換

一般人が日本語で記述した問

B湖の水位の毎日の増減 (cm) は, -5cm と 5cm の間で「完全にランダム」, 1日1日の変化分は無関係 (あいまいすぎ. 独立で同様に確からしい, くらい)

初日 (0日) には, 水位は 110cm だった.

- 30日までに, この期間の最高水位が 120cm より高くなることはどのくらい起きるか?
- 最高水位となるのはだいたい何日目か?

数理の人が書いた数理モデル

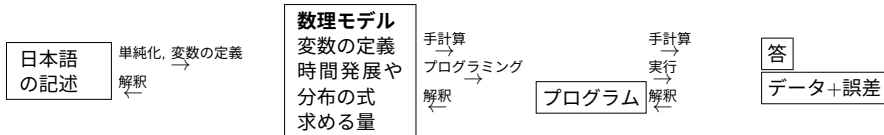
t 日目の水位を $X(t)$ とおく.

$$X(t) = X(t-1) + R(t), P(X(0) = 110) = 1.$$

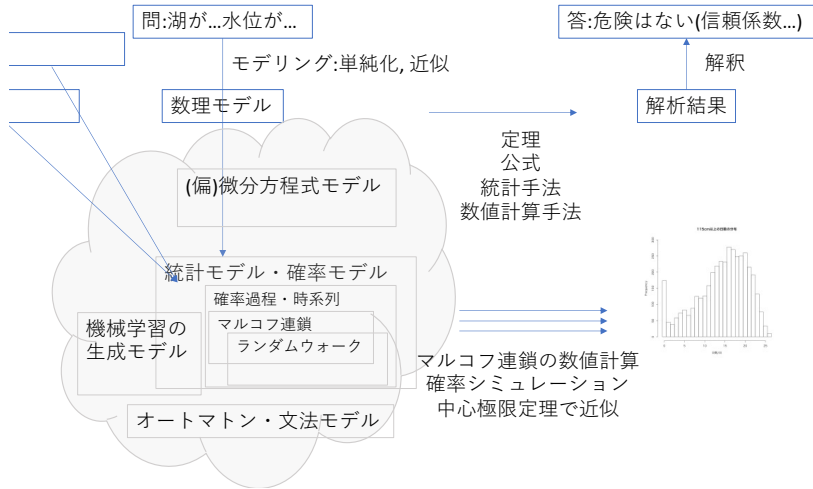
$R(t) \sim U(-5, 5)$ 独立同分布

- 母比率 $P(\max_t X(t) > 120)$

数理モデル



数理モデル, 数理モデリングとは?



他の数理モデルもある

- 力学の微分方程式モデル
- 人口の微分方程式モデル
- 確率モデル
 - ▶ AR(m) モデル
 - ★ ランダムウォーク (の単純なもの)

物理学

数理モデル

ここまで来たよ

11 連続型確率変数の変換

11 ランダムウォークのパスの母ナントカの推定・数理モデル・チームプロジェクト

- サンプルパス
- サンプルパスの推定のプログラム
- 数理モデル
- チームプロジェクト 1

チームプロジェクト 1 のスケジュール

- 2021-06-20 日 月の対面/オンラインチームの希望提出
- 2021-06-21 月 3 プログラムと式の計算とグラフの作成
 - ▶ 課題を読む
 - ▶ 日本語を数式にしてチームで合意する (数理モデルの定式化)
 - ▶ プログラムや式で解析, 結果やグラフ (C+RStudio)
- 2021-06-24 木 4 (チーム活動可能時間帯)
- 2021-06-28 月 4 スライド作成+発表練習
 - ▶ PowerPoint でスライドを作る (この日までにサンプルを出します)
 - ▶ 口頭発表のリハーサルをする (この日までにサンプルを出します)
- 2021-07-01 木 4 (チーム活動可能時間帯)
- 2021-07-05 月 3 プレゼンテーション
 - ▶ 開始までにスライドなどのファイルを提出
 - ▶ 2人で1枚ずつ交代で発表+質問応答

R と RStudio のしくみ

<https://www.data.math.ryukoku.ac.jp/guide/R/RStudio.pdf>

<https://youtu.be/pyupZF4Z0J4>

サブチーム課題のやり方 (計算科学☆演習 B) I

2-3 名程度の (サブ) チームでやる課題のやりかたです。

- 欠席するときは事前にサブチームメンバーと教員に連絡します。
- 課題の中で、自分のサブチームのミッション番号の部分だけをやります。
- サブチームメンバー間で学籍番号と名前を交換します。授業時間外の連絡は Teams か、Gmail t000000@mail.ryukoku.ac.jp か、または相談して決めた他の方法で行います。
- 自分のほうがよくわかってるっぽい分野は相手に説明し、相手のほうがよくわかってるっぽい分野は相手に説明してもらいましょう。
- 教員にきく、クラスでいちばん分かってる人にきく、ほうが疑問解決には速いですが、この活動では、未知のメンバーとコミュニケーションして疑問を解決すること自体を目的にしています。

サブチーム課題のやり方 (計算科学☆演習 B) II

- 疑問はまずサブチーム内で解決を試みましょう。もし解決できなかったり、意見が一致しなかったりしたときは、TA のアドバイスも受けてください。
- ファイル交換の方法: Teams のチャットや Gmail に添付で送ることはできます。Google Drive のファイルを共有することもできます。ファイルで右クリックして**共有**から。
- 講時終了時には *.c, *.xlsx などのファイルをテキストチャット添付で共有します。また Moodle に提出しておきます。締切までは何度でも削除提出ができるので、作業中のファイルの置き場所として使
- Moodle への課題提出方法 チームメンバーの誰かが提出すればそれが全員の提出となります。締切までに最終バージョンでいいことをチームメンバーが合意する必要があります。だれが提出するかをはっきりさせ、全員が合意してから最終版としましょう。

おせっかいなアドバイス

- 分担はなんとなくじゃなく明示的に決めて確認したほうがいい。ここやります、ここやって、と相手に伝えよう。
- 分担は、スライドごと、関数ごと、グラフとスライド、などが考えられる。また、時間管理担当、記録担当、(交代の)リーダー担当などがありうる。
- 相手としては、すこしだけおせっかい、すこしだけ押しつけがましい、人のほうが、遠慮深すぎる人よりやりやすくないですか？
- 相手が得意なところを発揮できるように工夫して分担しよう。
- 相手が何かを学んでいるときに先回りして学習機会を奪わないように注意。
- スケジュールはなんとなくじゃなく明示的に決めて確認したほうがいい。スライドはこだわり始めるときりがないので、ここは何分までにここまでここやる、そこで切り上げる、など。時間外に準備する時間の余裕がある/ないなどを相手に伝えよう。