ベクトルの内積

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L01(2022-04-08 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2023-04-06 Thu 14:55 JST hig"

今日の目標

- 授業の到達目標/合格条件を説明できる
- Mobius で学習できる
- 2,3 次元ベクトルの内積が計算できて利用できる

ここまで来たよ

線形代数とは?

到達目標 (アバウト)

- シラバスより
  - 行列の基本的な計算ができる。
  - ベクトルや直線などの図形の移動や拡大縮小が行列で表現できる。
  - 連立 1 次方程式を行列で表現し解くことができる。
- 教科書の前半の問題が何も見ないで楽勝で解ける.
- 教科書解読ベースで大学の数学の学び方ができる.

線形代数とは?

- ベクトル (vector) の続き．2,3 次元でなく n 次元で．行列 (matrix) も.
- 理系の学科はだいたい 1 年でやる.「行列と行列式」みたいな名前も.
- 線形代数と確率は人工知能, 機械学習の大前提.

数理のカリキュラムの中での線形代数

必修．後続 線形代数及び演習 II. 数学, 現象,DS, 情報科学ぜんぶで必要.

科目ののり

- 週 2 回水 1 金 1
- ノート PC 持参. 問題を解くための手書きノート用意.
- 毎回の小テスト driven で
- 連絡は Teams チームコード `tdhhn29`
- `https://hig3.net` → `https://moodle.hig3.net`
- 欠席の事前事後連絡不要. やむを得ない理由で成績的に考慮されたい場合は Moodle から欠席届 (最終回の授業まで)

相談できるところ

- オフィスアワー樋口 前期火昼, 1-507 or Teams chat a00010
- Math ラウンジ (1 号館 5 階 1-536,538). 毎日昼休みは大学院生常駐

科目の成績ののり

(シラバスより)
100 ピーナツ=小テスト 90 ピーナツ + 平常点 10 ピーナツ
(詳細)
90 ピーナツ=30 回 × 毎朝のトライアル (小テスト)3 ピーナツ
全学ルールとして 60 ピーナッツ以上が合格です (履修要項参照).
成績は研究室配属や奨学金に影響することがあります. (企業などに提出する) 成績証明書は SABC の区別で載り, 不合格科目は載りません.

ここまで来たよ

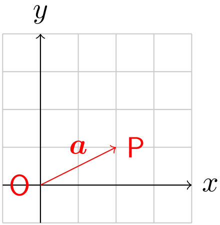
はじめに
- この授業どんなのり?

1 ベクトルの内積
- ベクトルの表示と演算の復習
- Mobius で問題演習
- ベクトルの内積

ベクトルの表示

ベクトルを $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$ のように書く．細字 a でなく太字 $\boldsymbol{a}$ で．手書きなら二重線で．成分は縦に並べて (横は別の意味がある)．$3, 4, \ldots$ 次元ベクトルも同じ．

始点 を O, 終点 を P とする矢印を，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ という．
平行移動して重なるベクトルは同じ．

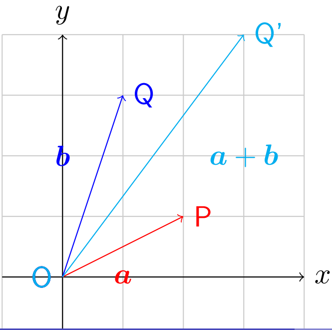


例えば A$(2, 5)$, B$(4, 6)$, なら，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$.
2 が x 成分，1 が y 成分．
教科書では角括弧 bracket [ ]．Web 教材は ()．翻訳して．

ベクトルの和

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$,
$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}'} = \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$
のとき, ベクトルの和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は

OP, OQ を 2 辺とする平行四辺形を作って, もう 1 個の頂点を Q′ とすると, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}'}$.



$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$.
$3, 4, 5, \ldots$ 次元ベクトルでも成分ごとに加える.

ベクトルの定数倍

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$, 実数 $k = 3$ に対して, ベクトルの定数倍 $k\boldsymbol{a}$ は

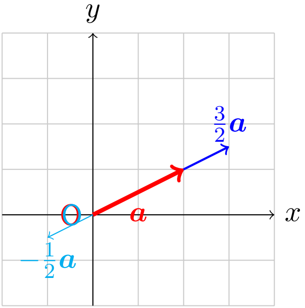
長さが $\boldsymbol{a}$ の長さの $|k|$ 倍のベクトルで,

$k > 0$ なら $\boldsymbol{a}$ と同じ向き, $k < 0$ なら $\boldsymbol{a}$ と逆の向き.

$k\boldsymbol{a} = k\left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}2\cdot k\\1\cdot k\end{smallmatrix}\right]$.

$3, 4, 5, \ldots$ 次元ベクトルでも成分ごとに k 倍する.

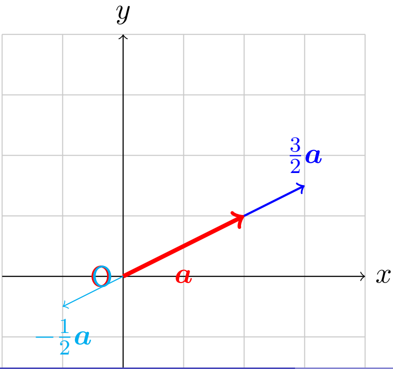
$k = 0$ ならゼロベクトル $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$.



ベクトルの平行

(定義) ベクトルの平行

零ベクトルでない n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が平行であるとは,
ある実数 k が存在して
$k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ とかけることをいう.
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は, $k > 0$ なら同じ向き, $k < 0$ なら逆の向きという.



ここまで来たよ

Mobius で問題演習

`https://mobius.st.ryukoku.ac.jp`
Mobius にログイン．初回はパスワードリセットが必要．全学統合認証とは別のパスワード．
フォローアップ課題 (4/20 まで) をやりたくなるけど，ぐっとこらえて線形代数．

ここまで来たよ

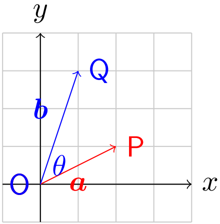
- はじめに
  - この授業どんなのり?
- 1 ベクトルの内積
  - ベクトルの表示と演算の復習
  - Mobius で問題演習
  - ベクトルの内積

ベクトルの内積

加藤 線形代数 §7

$\boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a}$ の長さを $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき,
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$
と定義する.



$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2 \times 1 + 1 \times 3$ のように定義する.

$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ と定義する.
$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ をベクトルの絶対値, 長さ という.

内積はスカラー積ともいう.
加藤 線形代数 §7.1 では,
内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,
絶対値 $|\boldsymbol{a}|$ をノルム $\|\boldsymbol{a}\|$,
という名前/記号で表している.

ベクトルの直交

(定義) ベクトルの直交

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角 θ が $\pi/2$ であるとき，または，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ または，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するという．

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するという．

単位ベクトル

(定義) 単位ベクトル

ベクトル $\boldsymbol{a}$ が $|\boldsymbol{a}|=1$ であるとき, $\boldsymbol{a}$ は単位ベクトルであるという.

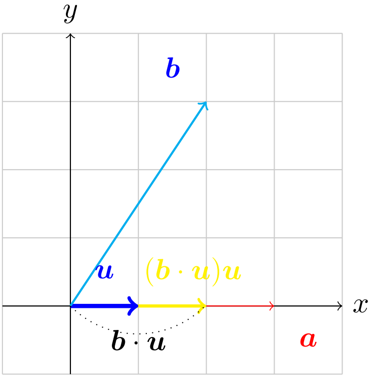
(定理)

ベクトル $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ に対して, $\boldsymbol{a}$ に平行な単位ベクトルは $\pm\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ である.
特に, 同じ向きの単位ベクトルが $+\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, 逆の向きの単位ベクトルが $-\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ である.

証明 $\cdots$
直観的説明 $\cdots$

ベクトル b のベクトル a への射影

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{u} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 向き成分 ($\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影) $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{b}| \cdot 1 \cos\theta$. (正負の実数)
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への射影 $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = (|\boldsymbol{b}| \cdot 1 \cos\theta)\boldsymbol{u}$. (ベクトル)



向き成分 (スカラー射影) の意味: $\boldsymbol{a}$ 向きに進みたい人にとって, $\boldsymbol{b}$ はどのくらい意味 (符号つきの長さ) があるか?

L01-Q1

Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
2. $\boldsymbol{b}$ と逆向きの単位ベクトルを求めよう.
3. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ 向きの成分を求めよう.
4. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ への射影を求めよう.
5. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ 向きの成分を求めよう.
6. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ への射影を求めよう.

L01-Q2

Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

北が y 軸の正の向き, 東が x 軸の正の向きであるような座標系を取る.

1. 南向きの単位ベクトルを成分表示で書こう.
2. 北西向き (北と西の中間 45° の向き) の単位ベクトルを成分表示で書こう.
3. 北西向きに 3km 進んだ. これは, 北向きにはどれだけ進んだことになる?
4. 北向きに 2km, 次に東向きに 1km 進んだ. これは, 北西向きにはどれだけ進んだことになる?

L01-Q3

Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

北が y 軸の正の向き, 東が x 軸の正の向きであるような座標系を取る. あるサッカーコートのサイドラインは, 自陣の端 $\mathrm{F}=\begin{bmatrix}-30\\-45\end{bmatrix}$, 敵陣の端 $\mathrm{E}=\begin{bmatrix}30\\45\end{bmatrix}$ である (単位は m)
以下いずれも電卓使用可だけど小数じゃなく厳密な答で.

1. ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ の長さを求めよう. 単位をつけて答えよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
3. 味方のフォワードが, ボールを $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$ まで運んだ. このフォワードは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか, 単位をつけて答えよう.
4. 味方のミッドフィールダーが, ボールを $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix}-30\\10\end{bmatrix}$ までドリブルした. このミッドフィールダーは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか答えよう (近づけたなら正, 遠ざけたなら負で).