ベクトルの外積

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L02(2022-04-13 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-13 Wed 06:56 JST hig"

今日の目標

- ベクトルのスカラー射影, 射影を内積で計算できる
- 射影の意味を説明できる
- 3 次元ベクトルの外積が計算できる

L01-Q1
Quiz 解答: ベクトルの射影と向き成分

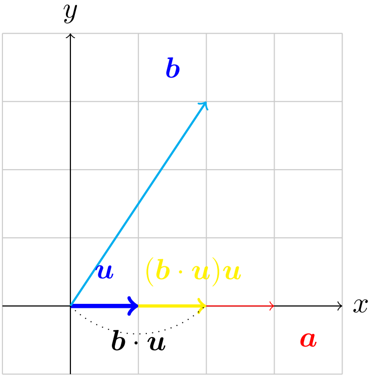
1. 同じ向きの単位ベクトルは $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.
2. 逆向きの単位ベクトルは $\frac{-1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} = \frac{-1}{\sqrt{30^2+10^2}}\begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ここまで来たよ

1. ベクトルの内積
   - ベクトルの内積
2. ベクトルの外積
   - 3 次元の座標系と基本ベクトル
   - 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

ベクトル b のベクトル a への射影

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{u} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 向き成分 ($\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影) $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{b}| \cdot 1 \cos\theta$. (正負の実数)
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への射影 $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = (|\boldsymbol{b}| \cdot 1 \cos\theta)\boldsymbol{u}$. (ベクトル)



向き成分 (スカラー射影) の意味: $\boldsymbol{a}$ 向きに進みたい人にとって, $\boldsymbol{b}$ はどのくらい意味 (符号つきの長さ) があるか?

L01-Q2

Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
2. $\boldsymbol{b}$ と逆向きの単位ベクトルを求めよう.
3. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ 向きの成分を求めよう.
4. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ への射影を求めよう.
5. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ 向きの成分を求めよう.
6. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ への射影を求めよう.

L01-Q3

Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

北が y 軸の正の向き, 東が x 軸の正の向きであるような座標系を取る.

1. 南向きの単位ベクトルを成分表示で書こう.
2. 北西向き (北と西の中間 45° の向き) の単位ベクトルを成分表示で書こう.
3. 北西向きに 3km 進んだ. これは, 北向きにはどれだけ進んだことになる?
4. 北向きに 2km, 次に東向きに 1km 進んだ. これは, 北西向きにはどれだけ進んだことになる?

L01-Q4

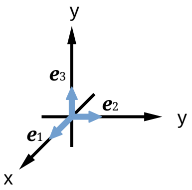
Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

北が y 軸の正の向き, 東が x 軸の正の向きであるような座標系を取る.
あるサッカーコートのサイドラインは, 自陣の端 $\mathrm{F} = \begin{bmatrix} -30 \\ -45 \end{bmatrix}$, 敵陣の端 $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 30 \\ 45 \end{bmatrix}$ である (単位は m)
以下いずれも電卓使用可だけど小数じゃなく厳密な答で.

1. ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ の長さを求めよう. 単位をつけて答えよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
3. 味方のフォワードが, ボールを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ まで運んだ. このフォワードは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか, 単位をつけて答えよう.
4. 味方のミッドフィールダーが, ボールを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} -30 \\ 10 \end{bmatrix}$ までドリブルした. このミッドフィールダーは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか答えよう (近づけたなら正, 遠ざけたなら負で).

ここまで来たよ

3 次元の座標系と基本ベクトル



$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の形の 3 つのベクトルを基本ベクトル 加藤 線形代数 p.25 という.

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

クロネッカーのデルタ 加藤 線形代数 p.25 $\delta_{ij} \overset{\text{定義}}{=} \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

ここまで来たよ

3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

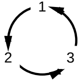
加藤 線形代数 §7. 研究

2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して, 次の式で表わされるベクトル $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のことを外積という. この記号 '×' は新しい記号. (実数のふつうの 'かける' とたまたま同じ文字).

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}$$

1 成分覚えれば, あとは, $1, 2, 3$ つまり x, y, z が循環的 (cyclic) に入れ替わってることに注意.

$1 \to 2 \to 3 \to 1.$



別の書き方

$$\begin{aligned}&(a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3) \times (b_1 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2 + b_3 \boldsymbol{e}_3) \\ =&(a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

外積の成分表示の覚え方

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \\ & a_1 & b_1 \\ & a_2 & b_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

L02-Q1

Quiz(3 次元ベクトルの外積)

外積 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ を求めよう.

計算方法

ふつうの数であるかのように展開してよい.

$$\text{超注意 } \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \text{よって} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c},$$
$$(c\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = c \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

$$\text{計算例} (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

外積の図形的な意味

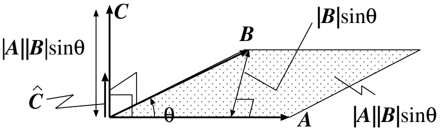
$$\boxed{\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\ (\sin\theta)\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{c}}}$$

ただし, $\boldsymbol{e}_{\mathrm{c}} = \hat{C}$ は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトルで, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{c}} \rangle$ が右手系をなす (右手系の座標系 ⟨親指, 人差し指, 中指⟩ $= \langle \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} \rangle$ を π を越えて開かずに得られる) もの.

別の言い方

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0.$

$\boldsymbol{c}$ の向きは, $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に回る右ねじが進む向き.



大きさは $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のはる平行四辺形の面積).

- 力のモーメント $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$.
- 電磁気学のフレミングの左手の法則 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.

例

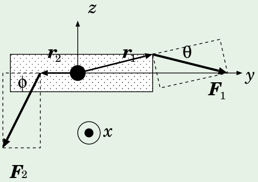
$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 =?$

$\boldsymbol{e}_1 \times (\boldsymbol{e} + 2\boldsymbol{e}_2) =?$

L02-Q2

Quiz(3 次元ベクトルの外積)

原点を中心に回転するやじろべえを考える. $\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を, $\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を加える. 右の図 (ベクトルは正確じゃないです) のように x 軸の正の向きから見たとき, やじろべえは時計回り, 反時計回りどちらに回るか考えよう.



L02-Q3

Quiz(3 次元ベクトルの外積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.