スカラー 3 重積

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L03(2022-04-15 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-15 Fri 18:54 JST hig"

今日の目標

- 空間ベクトルのスカラー 3 重積を計算できる
- スカラー 3 重積の意味を説明し利用できる
- 内積と外積とスカラー倍の混ざった計算ができる

L01-Q1
Quiz 解答: ベクトルの射影と向き成分

1. $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは
$\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\left[\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right]$.
2. $\boldsymbol{b}$ と逆向きの単位ベクトルは $-\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{-1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} = \frac{-1}{\sqrt{30^2+10^2}}\left[\begin{smallmatrix}30\\10\end{smallmatrix}\right] = \frac{-1}{\sqrt{10}}\left[\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right]$.
3. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
4. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{1}{10}\left[\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right]$.
5. $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 10$.
6. $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{5}\cdot 10\left[\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right]$.

L02-Q1
Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積

$$\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-6\\4\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot(-5)-4\cdot(-2)\\-2\cdot(-6)-(-5)\cdot 1\\1\cdot 4+(-6)\cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\17\\22\end{bmatrix}$$

ここまで来たよ

2. ベクトルの外積

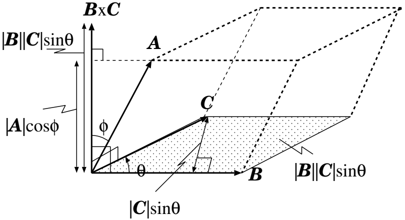
3. スカラー 3 重積
   - スカラー 3 重積
   - 直観的意味
   - 内積・外積・スカラー 3 重積の応用

スカラー 3 重積

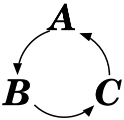
外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ はベクトル.
ということは, 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラー (1 個の実数) になる.

$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})}$

をスカラー 3 重積という. ($|\boldsymbol{abc}|$ ともかく. この縦棒は絶対値とは別の記号)
図形的に考えると, 絶対値 $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする $\boxed{\text{平行六面体の体積}}$.



絶対値 $|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ は体積だから, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を入れ替えても等しい.
じゃあ符号は?
実は, 循環的に変えたときは $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の符号も同じ.



1 つのベクトルを逆向きにしたり, ベクトルの順序を 1 ペア入れ替えたりすると, 符号が逆になる.

左手なら逆符号	符号つき体積

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-1\times(-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-1\times\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

L03-Q1

Quiz(スカラー 3 重積)

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよう.
2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよう.
3. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ に親人中を重ねられるのは右手か左手か.

ここまで来たよ

2 ベクトルの外積

3 スカラー 3 重積
- スカラー 3 重積
- 直観的意味
- 内積・外積・スカラー 3 重積の応用

スカラー 3 重積の直観的意味

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) =$ 平行 6 面体の符号つき体積

「符号つき」=意味に応じて正負の値をとる

- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) > 0 \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$ が右手系.
- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が 一平面上
- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) < 0 \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$ が左手系.

右手系左手系

順序に意味のあるベクトルの 3 個組 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$ が, 右手の ⟨ 親, 人, 中 ⟩ に重ねられるとき, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$ は右手系をなすという. 左手に重ねられるとき左手系をなすという.

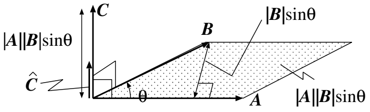
断らない限り, 3 次元の基本ベクトル $\langle\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}},\boldsymbol{e}_{\mathrm{y}},\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}$ は右手系をなすように取る.

外積の直観的意味

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$ $\boxed{\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ のはる平行四辺形の面積と向き}}$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で張った漁業用網の効率を伝えるもの

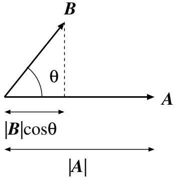
- 2 本の棒 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり $\boxed{\text{平行 4 辺形の面積}}$ が $\boxed{|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}$. 2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- フレミングの左手の法則とか, これで簡単に書ける. $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$.



内積の直観的意味

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =$ $\boxed{\boldsymbol{a}\text{ と }\boldsymbol{b}\text{ の相乗効果, 協力したときのパワー}}$ みたいなもの

- $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ それぞれの絶対値が大きいと, 内積の絶対値も大きい
- $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ の向きが
  - 近いほど正で大きい. $\cos 0 = 1$
  - 反対だと負. $\cos\pi = -1$
  - 直交してると零. $\cos\frac{\pi}{2} = -1$. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$.
- 仕事 (スカラー) は, 力 (ベクトル) と変位 (ベクトル) の内積.
- $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{b}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ は, $\boldsymbol{b}$ の「 $\boldsymbol{a}$ 向き成分」(符号つきの量)
- $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}$ は, $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への射影 (ベクトル)



L03-Q2

Quiz(ベクトルとスカラーの演算)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 次元ベクトル, k をスカラー (ふつうの 1 個の実数のこと) とする.
次の式 (の計算結果) を, スカラー, 3 次元ベクトル, 間違った式に分類しよう.

1. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$
2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$
3. $(\boldsymbol{a} \cdot k) \times \boldsymbol{b}$
4. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot k\boldsymbol{c}$
5. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

ここまで来たよ

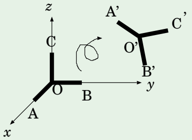
2 ベクトルの外積

3 スカラー 3 重積
- スカラー 3 重積
- 直観的意味
- 内積・外積・スカラー 3 重積の応用

L03-Q3

Quiz(ベクトルの外積)

最初, 3 本足の金具 OABC が原点に図のように置かれていた. この金具を曲げたり壊したりせずに, 空中に投げたところ, ある瞬間には, $\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}$ は $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ の向き, $\overrightarrow{\mathrm{O'C'}}$ は $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の向きになっていた.



1. この瞬間の $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ の向きの単位ベクトルを求めよう.

Hint $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ は平面 $\mathrm{O'B'C'}$ の法線ベクトル.

L03-Q4

Quiz(3 次元ベクトルの外積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.