直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L04(2022-04-20 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-20 Wed 07:13 JST hig"

今日の目標

- 直線, 平面のパラメタ表示が説明できる
- 法線ベクトルを用いた直線, 平面の方程式が説明できる

Quiz 解答: スカラー 3 重積

1. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} +2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. 面積は, $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.
2. スカラー 3 重積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = -2$
   よって体積はその絶対値 $|-2| = 2$.
3. スカラー 3 重積の値が負だから, 左手.

L03-Q1

Quiz 解答: ベクトルとスカラーの演算

1. へん
2. スカラー
3. ベクトル
4. スカラー
5. ベクトル

L03-Q2
Quiz 解答: ベクトルの外積

1. $\langle \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} \rangle$ は右手系. 回転後の $\langle \overrightarrow{\mathrm{O'C'}}, \overrightarrow{\mathrm{O'A'}}, \overrightarrow{\mathrm{O'B'}} \rangle$ も右手系. よって, 求める向きのベクトルは $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{O'C'}} \times \overrightarrow{\mathrm{O'A'}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$. 同じ向きの単位ベクトルを求めると, $\boldsymbol{u} = \frac{1}{|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{110}} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$.

ここまで来たよ

3 スカラー 3 重積

4 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 直線のパラメタ表示と方程式
- 平面のパラメタ表示と方程式

空間内または平面内の直線のパラメタ表示

$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ に平行な直線のパラメタ表示 (媒介変数表示)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a}t \\
\text{すなわち}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} \qquad (t\text{はパラメタ})
\end{aligned}
$$

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{a}$ に平行である

GeoGebra(動的幾何ソフトウェア,Web アプリ)

2D

https://www.geogebra.org/m/skj88vSN

3D

https://www.geogebra.org/m/KYg7AZ7M

(平面内の) 直線の方程式

直線と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \mathbf{0}$) を, 直線の法 (線) ベクトル,normal vecvtor という. 直線の向き $\boldsymbol{a}$ を $\pm\frac{pi}{2}$ 回転して得られる.

$\boldsymbol{c}$ を通り, 法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\neq \mathbf{0})$ と垂直な直線の方程式

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{n}$ に垂直である

$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}=C$ (実数の定数) とおくと,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=C \qquad (C\text{は定数})$$

とも書ける. $\boldsymbol{x}=\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{n}=\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]$ として成分で書くと,

$$ax+by=C.$$

https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P

L04-Q1

Quiz(直線の方程式)

1. ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に平行で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ を通る直線のパラメタ表示と平面の方程式を求めよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に垂直で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}$ を通る直線のパラメタ表示と平面の方程式を求めよう.

直線を境界とする半平面の式

直線は平面を 2 つの半平面に分割する．各半平面は不等式で指定される．

$\boldsymbol{n}$ と同じ側 $\quad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n} > 0$

$\boldsymbol{n}$ と逆の側 $\quad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n} < 0$

ここまで来たよ

3 スカラー 3 重積

4 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 直線のパラメタ表示と方程式
- 平面のパラメタ表示と方程式

(空間の中の) 平面のパラメタ表示

$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に平行な平面のパラメタ表示

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s$$

すなわち$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s + \boldsymbol{c}$　　$(t, s$はパラメタ$), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$は平行でない)

https://www.geogebra.org/m/YHmGKuJN

(空間の中の) 平面の方程式

平面と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \mathbf{0}$) を, 平面の法 (線) ベクトル normal vecvtor という. 平面に平行な (しかし互いに平行ではない)2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ から外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で得られる.

$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{n}(\neq \mathbf{0})$ に垂直な平面の方程式

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} = C$ とおくと,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = C$$

$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by + cz = C.$$

https://www.geogebra.org/m/v2TedmJ2

L04-Q2

Quiz(平面のパラメタ表示と方程式)

$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ を含む平面を考える.

1. パラメタ表示を求めよう
2. 方程式を求めよう
3. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面に含まれるか調べよう.

平面を境界とする半空間の式

平面は空間を 2 つの半空間に分割する．各半空間は不等式で指定される．

$$\boldsymbol{n} \text{ と同じ側} \qquad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n} > 0$$

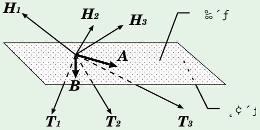
$$\boldsymbol{n} \text{ と逆の側} \qquad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n} < 0$$

平面の中の直線, 空間の中の平面が同じ式で扱えることに気づいただろう．これは, どちらも 1 次元減った,, 1 次式で書ける集合 (超平面という) だという共通点があるから.

L04-Q3

Quiz(空間内の平面の分ける半空間)

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ とする.



1. $|\boldsymbol{b}|$ を求めよう.
2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよう.
3. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよう.
4. $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a})$ を求めよう.
5. 原点 $\mathbf{0}$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方がのる平面は 1 つに定まる. (図では薄く塗られている. それは xy 平面とは異なる). 図は, その平面を斜めから見たものである. ベクトルがこの平面の表裏どちら側を向いているかについて, $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$ のようなベクトルを表向き, $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$ のようなベクトルを裏向きということにする. $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ が表向きか裏向きか考えよう.