0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L05(2022-04-22 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-22 Fri 15:53 JST hig"

今日の目標

- 2×2 行列と 2×1 行列 (ベクトル) の積が計算できる
- 1 次変換から行列, 行列から 1 次変換を求められる

L04-Q1
Quiz 解答: 直線の方程式

1. パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (t\text{はパラメタ})$$

2. 法線ベクトルのひとつは $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. よって, 直線の方程式は

$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0.$$

すなわち

$$(x-5) - 3(y-7) = 0$$

3. 直線と平行なベクトルのひとつは $\boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$. よってパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 13 \end{smallmatrix}\right].$$

方程式は

$$\left(\boldsymbol{x} - \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 13 \end{smallmatrix}\right]\right) \cdot \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = 0.$$

すなわち

$$3(x-3) + (y-13) = 0.$$

L04-Q2

Quiz 解答: 平面のパラメタ表示と方程式

1. パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t, s\text{はパラメタ})$$

2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は平面の法線ベクトルのひとつ. よって, 方程式は,

$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

すなわち

$$x - 13 = 0.$$

3. 方程式を満たしているかどうかチェックして, $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ は平面上にある. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ は平面上にない.

ここまで来たよ

写像 加藤 線形代数 §0.1

定義 1 (写像 (mapping))

加藤 線形代数 参照.

写像の記号

$$f : X \to Y$$

写像名 : 集合 (set) → 集合

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : 要素, 元 (element) ↦ 像 (image)

例 2

$\mathbb{R}$: 実数の集合

$\mathbb{R}^2 = \{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] | x, y \in \mathbb{R}\}$: 2 次元実数ベクトルの集合=平面 E.

直線のパラメタ表示 (前回) は写像.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$f : t \mapsto \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$

例 3

次は写像

$f : \{x | x > 0, x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$

$f : x \mapsto \log x$

変換

定義 4 (変換)

集合 X から X 自身への写像を X の変換 (transformation) という.

例 5

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

例 6

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

ここまで来たよ

1 次変換 加藤 線形代数 p.7

定義 7 (1 次変換)

$\mathbb{R}^2$ の変換で,

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

の形のものを (2 次元の)1 次変換, 線形変換 (linear transformation) という.

教科書修正 加藤 線形代数 p.7

誤 これらの点の座標の間には以下の関係式が成り立つ. (式) この場合...)

正 これらの点の座標の間に以下の関係式 (式) が成り立つ場合...)

教科書の間違い探し

末尾の奥付の, 版と年月日を確認しよう.

出版社や著者のサイトに正誤表がないか確認しよう

https://www.chart.co.jp/goods/item/contents/43168.html

定義 8 (行列 (1 次変換の記号))

$$f : \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{x'} \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{a} & \boxed{b} \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{x} \\ \boxed{y} \end{bmatrix}$$

はすべて同じ意味.
$\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ を行列 (matrix) という.

例題

行列 A と $\boldsymbol{x}$ から像 $A\boldsymbol{x}$

加藤 線形代数 例題 2(p.9), mobius K0.2, チーム課題 1

$\boldsymbol{x}$ と像 $A\boldsymbol{x}$ から行列 A

加藤 線形代数 例題 1, 加藤 線形代数 例題 3, mobius K0.2, チーム課題 2

mobuis での行列入力

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$ `<x,y>`

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$ `< <a,c>|<b,d> >` (or `< <a|b>,<c|d> >`)

縦ベクトルを横にならべたイメージ.

ここまで来たよ

4 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

5 0 章平面と 1 次変換
- 1. 写像と変換
- 2. 1 次変換と行列
- 3. いろいろな 1 次変換 (途中まで)

対称変換 加藤 線形代数 例 1(p.7)

例 9 (対称変換)

- x 軸に関する対称変換 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- y 軸に関する対称変換 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 原点に関する対称変換 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

相似変換と恒等変換 加藤 線形代数 例 1(p.8)

例 10 (相似変換)

- 相似比 k の相似変換 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = kE$
- 恒等変換 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

回転と 1 次変換 加藤 線形代数 (p.13)

例 11 (回転変換)

- 一般角 θ だけ回転した回転変換 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$