0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L06(2022-04-27 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-27 Wed 11:36 JST hig"

今日の目標

- 回転行列を (ノートを見なくても) 書ける
- 行列の積を (ノートを見なくても) 計算できる
- 写像と行列のの合成 (積), 結合法則の関係を説明できる

ここまで来たよ

5 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 0 章平面と 1 次変換
- 3. いろいろな 1 次変換
- 4'. 直線の写像による像

回転と 1 次変換 加藤 線形代数 (p.13)

例 1 (回転変換)

原点のまわりに一般角 θ だけ回転移動する 1 次変換 f_θ を表す行列 (回転行列) は

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

なぜなら, 1 次変換であることを仮定して,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

から 行列 R_θ を決めるとそうなる.

覚え方

自分の言葉でどうぞ

L06-Q1

Quiz(回転移動の 1 次変換の行列)

1. 点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ を, 原点を中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動した点 $\boldsymbol{x}'$ を求めよう.
2. 点 $\boldsymbol{x}'$ を, さらに, 原点を中心に $\frac{1}{3}\pi$ だけ回転移動した点 $\boldsymbol{x}''$ を求めよう.

加藤 線形代数 例題 6(p.14) mobius K0.3.40

写像が等しいとは 加藤 線形代数 p.12,191

写像の記号

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (domain) → 終域 (codomain)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 :　↦ 像 (image)

「 $f(a) = b$」「写像 f による a の像は b」「写像 f は a を b に写す」

定義 2 (写像が等しい 加藤 線形代数 p.12)

$f : X \to Y$ と $g : Z \to W$ が等しい $(f = g)$ (写像として等しい) とは, $X = Z, Y = W$ であって, X の任意の要素 $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ (要素として等しい) が成り立つことをいう.

1 次変換と行列の 1 対 1 対応

$\mathbb{R}^2$ の 1 次変換が $f = g$ であること
$\Leftrightarrow$ f, g を表す行列の 4 個の数がそれぞれ等しいこと

1 次変換の合成 加藤 線形代数 p.10

定義 3 (合成写像 (composition))

加藤 線形代数 p.10

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$

合成写像 $h : X \to Z$ を $h(x) = g(f(x))$ で定義する.

$h = g \circ f$ と書く

$g \circ f \neq f \circ g$.

加藤 線形代数 例題 4(p.11)

- $X = Y = Z$ なら, f, g, h は X の変換. h は合成変換
- $Y = Z = \mathbb{R}$ なら f, g は関数 加藤 線形代数 p.191, h は合成関数

加藤 線形代数 例題 5(p.11) でその上の部分を解説

例 4

1 次変換 f を表す行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 1 次変換 g を表す行列を $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ とする.
1 次変換 $g \circ f$ を表す行列 C を求めよう.

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とする.

$(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) = B(A\boldsymbol{x}) = B \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y)-(2x-y) \\ -5(x+y)+3(2x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x+3y \\ 1x-8y \end{bmatrix}$.

この 1 次変換を表す行列は $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$.

任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $C\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x})$ が成立する.

行列 C を B と A の積 加藤 線形代数 p.22 とよび, 記号 BA で表すことにしよう.

一般に BA はどんな式で書ける?

行列の積

加藤 線形代数 p.22

一般の成分で考えて,

$$\begin{bmatrix} (ae+bg)x+(af+bh)y \\ (ce+dg)x+(cf+dh)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

より,

行列の積

$$\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

下左 =下 ·左

$BA \neq AB$. なぜなら $g \circ f \neq f \circ g$ だから.

加藤 線形代数 例題 5

3 個以上の写像の合成 加藤 線形代数 p.12 ,3 個以上の行列の積

f, g, h を写像とする.
任意の $x \in X$ に対して,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))), \quad ((h \circ g) \circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

$\rightsquigarrow$ 写像は合成の順序によらない.

写像の結合法則 (associativity) $\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

この両辺を, 便利な記号として, $h \circ g \circ f$ と書いちゃう.

f, g, h が 1 次変換とし, これらを表す行列を A, B, C とする.
$h \circ g \circ f$ と $h \circ g \circ f$ の表す行列を考えて,
$\rightsquigarrow$ 行列の積の計算の順序によらない.

行列の積の結合法則 (associativity) $\quad (C(BA)) = (CB)A$

これを, 便利な記号として, CBA と書いちゃう.

L06-Q2

Quiz(1 次変換の合成)

最初に $y = x$ に関する対称移動, 次に原点のまわりの角 $\frac{1}{4}\pi$ の回転移動, 最後に y 軸に関する対称移動を行う.

1. 3 つの 1 次変換それぞれを表す行列を書こう
2. 3 つの 1 次変換の合成変換を表す行列を書こう

mobius K0.3.20

ここまで来たよ

5 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 0 章平面と 1 次変換

- 3. いろいろな 1 次変換
- 4'. 直線の写像による像

直線の 1 次変換による像

定義 5 (写像による部分集合の像 加藤 線形代数 p.191)

$f : X \to Y$ を写像とする. 部分集合 $S \subset X$ について, $\{f(x) | x \in S\} \subset Y$ を, 写像 f による S の像という.

例 6

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ とパラメタ表示される直線の, 行列 A で表される 1 次変換による像は, ($A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ でない限り) 直線で,
$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{a}t + A\boldsymbol{c}$ とパラメタ表示される.
なぜなら, $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, t \in \mathbb{R}\}$ の各点の f による像を考えて,
$\{A\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\} = \{\boldsymbol{x}' | \boldsymbol{x}' = (A\boldsymbol{a})t + A\boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\}$.

L06-Q3

Quiz(パラメタ表示された直線の 1 次変換による像)

点 $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ に平行な直線 ℓ を考える.
原点のまわりに, 角 $\frac{1}{6}\pi$ だけ ℓ を回転移動した直線 ℓ' のパラメタ表示を求めよう.