0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L07(2022-04-29 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-29 Fri 16:35 JST hig"

今日の目標

- 逆写像の定義と性質を説明できる
- 簡単な 1 次変換の逆変換を求められる
- 行列の逆行列が求められる

L06-Q1
Quiz 解答: 回転移動の 1 次変換の行列

1. $$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & +\cos\frac{2}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}.$$

2. $$\boldsymbol{x}'' = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{3}\pi & -\sin\frac{1}{3}\pi \\ \sin\frac{1}{3}\pi & +\cos\frac{1}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

L06-Q2
Quiz 解答:1 次変換の合成

1. $y = x$ に関する対称移動 $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

2. 角 $\frac{1}{4}\pi$ の回転移動 $B = R_{\frac{1}{4}\pi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. y 軸に関する対称移動 $C = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.
3. $CBA = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = R_{\pi/4}$.

ここまで来たよ

6 0 章平面と 1 次変換

7 0 章平面と 1 次変換
- 3. いろいろな 1 次変換
- 4'. 直線の写像による像

逆写像

写像

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (domain) $\to$ 終域 (codomain)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : $\mapsto$ 像 (image)

「 $f(a) = b$」「写像 f による a の像は b」「写像 f は a を b に写す」

定義 1 (値域 (range) 加藤 線形代数 p.12)

終域の部分集合 $\{f(x)|x \in X\} \subset Y$ を f の値域という.

定義 2 (上への (onto) 写像, 全射 (surjection) 加藤 線形代数 p.12)

f は X から Y の上への写像 $\Leftrightarrow$ 値域=終域

定義 3 (1 対 1 の (one-to-one) 写像, 単射 (injection) 加藤 線形代数 p.13)

f は 1 対 1 の写像 $\Leftrightarrow (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

定義 4 (全単射 (bijection) 加藤 線形代数 p.13)

f が全単射 $\Leftrightarrow$ f が Y の上への 1 対 1 の写像

逆写像

f が Y の上への 1 対 1 の写像であるとき
Y の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる X の要素がただひとつ定まる.
$g : y \mapsto x$ で写像 $g : Y \to X$ を定める.
g を f の逆写像といい, f^{-1} とかく. (逆数ではない)

$$\begin{aligned} f^{-1} &: Y \to X \\ f(x) &\mapsto x \end{aligned}$$

変換なら 逆変換

L07-Q1

Quiz(逆写像)

1. 写像 $f : \{x | x > 0, x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \log x$ に逆写像があれば求めよう.
2. 写像 $g : \{x | x \neq 0, x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, $g : x \mapsto \log |x|$ に逆写像があれば求めよう.
3. 写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$ に逆写像があれば求めよう.

逆写像の性質

逆写像の逆写像はもとの写像. すなわち $(f^{-1})^{-1} = f$

定義 5

恒等写像 (恒等変換) $\mathrm{id}_X : X \to X$
$\mathrm{id}_X : x \mapsto x$.

写像 (恒等変換)

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ は 1 次変換で, 単位行列 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ で表現される.

$f : X \to Y$, 1 対 1 で上への写像のとき,
$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$
$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$

1 次変換の逆変換の行列は?

意味から考える

例 6

$\frac{1}{6}\pi$ の回転変換 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の逆変換を表す行列は?

(意味から考えて) f^{-1} は $-\frac{1}{6}\pi$ の回転変換.
よって

$$R_{-\frac{1}{6}\pi} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

1 次変換の逆変換の行列は?

逆行列を求める

例 7

1 次変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が 1 対 1 で X の上への変換であるとする. f が行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表現されるとき, f^{-1} を表現する $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ は?

考え方 1

A は $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ だから,
$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ だから, ここから B を求める.

考え方 2 $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ より

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

未知数 p, q, r, s の 4 元 1 次方程式. これを解く.

逆行列

1 次変換 f を表す行列が $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき, 逆変換 f^{-1} があるなら, それを表す行列を逆行列 (inverse) A^{-1} といい,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

とかける.

検算容易.

L07-Q2

Quiz(逆行列)

行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ に対して, $BA = E$ を満たす行列 B を求めよう.

加藤 線形代数 例題 4(p.36) 加藤 線形代数 練習 7(p.36) (検算容易)
mobius K0.3.30
チーム課題 L07

ここまで来たよ

直線の 1 次変換による像

定義 8 (写像による部分集合の像 加藤 線形代数 p.191)

$f: X \to Y$ を写像とする. 部分集合 $S \subset X$ について, $\{f(x) | x \in S\} \subset Y$ を, 写像 f による S の像という.

例 9 (直線のパラメタ表示)

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ とパラメタ表示される直線の, 行列 A で表される 1 次変換による像は, ($A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ でない限り) 直線で,
$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{a}t + A\boldsymbol{c}$ とパラメタ表示される.
なぜなら, $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, t \in \mathbb{R}\}$ の各点の f による像を考えて,
$\{A\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\} = \{\boldsymbol{x}' | \boldsymbol{x}' = (A\boldsymbol{a})t + A\boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\}$.

法線との内積の方程式で決まる直線の像は, もう少し後で.

L07-Q3

Quiz(パラメタ表示された直線の 1 次変換による像)

点 $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ に平行な直線 ℓ を考える.
原点のまわりに, 角 $\frac{1}{6}\pi$ だけ ℓ を回転移動した直線 ℓ' のパラメタ表示を求めよう.

モバイルアプリ紹介

龍大ポータルアプリ https://ru.portal.ac/ に加えて

Moodle App

取得 https://download.moodle.org/mobile

指定する URL https://moodle.hig3.net/moodle

Moodle から通知がくる，閲覧しやすい．テストや練習問題には使わないほうがいい?

Gmail App

取得 https://www.google.com/intl/ja/gmail/about/

龍大 Gmail y220000@mail.ryukoku.ac.jp の通知と送受信．ポータル休講/教室変更， manaba も Moodle もこのアドレスに通知メール送る (ように設定できる)．