第 1 章 行列の概念 (和・差・スカラー倍・積

樋口さぶろお　`https://hig3.net`

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L08(2022-05-06 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-08 Sun 08:59 JST hig"

今日の目標

- 行列の型と成分と行ベクトル列ベクトルを読み取れる.
- 行列の和とスカラー倍を計算できる
- 行列の積を計算できる

L07-Q1
Quiz 解答: 逆写像

1. 実は, 上への 1 対 1 の写像になっている.
   $f^{-1}: \mathbb{R} \to \{x|x > 0, x \in \mathbb{R}\}$, $f^{-1}: x \mapsto \mathrm{e}^x$.
2. g は上への写像ではあるが, 1 対 1 の写像でないので, g^{-1} は存在しない.
3. h は上への写像ではない (1 対 1 の写像ではある) ので, h^{-1} は存在しない.

L07-Q2
Quiz 解答: 逆行列

逆行列 A^{-1} の定義と 2 次の逆行列の公式から,

$$B = A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 3 - 2\cdot 4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & +\frac{2}{5} \\ +\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

B の成分を未知数として 4 元連立 1 次方程式を解いても求められる.

L07-Q3

Quiz 解答: パラメタ表示された直線の 1 次変換による像

ℓ のパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

ℓ' のパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{6}\pi & -\sin\frac{1}{6}\pi \\ \sin\frac{1}{6}\pi & +\cos\frac{1}{6}\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{6}\pi & -\sin\frac{1}{6}\pi \\ \sin\frac{1}{6}\pi & +\cos\frac{1}{6}\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \cdots .$$

ここまで来たよ

◆行列とは

定義 1 (行列)

加藤 線形代数 定義 1-1(p.16)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を m 行 n 列の 行列 という.
$a_{ij} \in \mathbb{R}$ を A の (i,j) 成分という 加藤 線形代数 p.17

加藤 線形代数 例 1(p.17), 練習 1,2(p.18) mobius K1.1.10

正方行列

定義 2 (正方行列)

加藤 線形代数 p.17

行列 A が n 行 n 列であるとき, A は n 次の正方行列という.

$a_{11}, \cdots a_{nn}$ を対角成分という. 対角成分以外 0 の行列を対角行列という. 加藤 線形代数 §1.3

定義 3 (行ベクトル, 列ベクトル)

加藤 線形代数 p.17

- n 行 1 列の行列を縦ベクトルという 加藤 線形代数 p.17
- 行列 A の中の $\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$ を, 行列 A の第 j 列という 加藤 線形代数 p.16
- A の第 j 列を m 行 1 列の行列すなわちベクトル (列ベクトル, 縦ベクトル) と見なした $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ を, A の第 j 列ベクトルという 加藤 線形代数 なし mobius <a,b,c>
- 1 行 m 列の行列を横ベクトルという 加藤 線形代数 p.17
- 行列 A の中の $a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}$ を, 行列 A の第 i 行という 加藤 線形代数 p.16
- A の第 i 列を 1 行 n 列の行列すなわちベクトル (行ベクトル, 横ベクトル) と見なした $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ を, A の第 i 行ベクトルという 加藤 線形代数 なし 大
  注意:mobius <a|b|c>

加藤 線形代数 例 2(p.18), 練習 3(p.18) mobius K1.1.10

ベクトルは行列の一種だが, mobius では, 1 行 m 列の行列<<a,b,c>> と, 列ベクトル (縦ベクトル)<a,b,c> を区別する, など.

数 (スカラー) は 1 行 1 列の行列とも見なせるが, mobius での入力は区別する.

ここまで来たよ

◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, 零行列

- 行列の相等 加藤 線形代数 定義 2-1(p.19)
  - ある概念で, 2 つが「等しい」ことの定義は自明ではない. 例: 三角形
- 行列の和と差 加藤 線形代数 定義 2-2(p.19)
  - 型の異なる行列の間の和や差は定義されない
- 行列のスカラー (定数) 倍 加藤 線形代数 定義 2-3(p.19)

なるべく行列の変数 A, B, O のまま計算し, 成分で書くのは最後の手段

加藤 線形代数 例 1, 例題 1,2, 練習 1,2(pp.20–21) mobius K1.2.10

零行列, ゼロ行列

定義 4 (零行列)

加藤 線形代数 定義 2-4(p.22) $O, \mathbf{0}$.
すべての成分が 0 である行列.

定理 5 (零行列を含む行列の和)

加藤 線形代数 定理 2-1(p.22)
行列の型があっているとき,
$A + O = O + A$
$A + (-A) = (-A) + A = A - A = O$

◆行列の積 加藤 線形代数 定義 2-5

定義 6 (行列の積)

- 行列 A ($\ell \times m$ 型, 成分 a_{ij} $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 B ($m' \times n$ 型, 成分 b_{ij} $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 A, B の積 AB が定義され,

- 行列 $C = AB$ ($\ell \times n$ 型, 成分 c_{ij} $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\ell = 2, m = m' = 3, n = 2.$

$$\begin{aligned} c_{21} =& \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} \\ =& a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = -2 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 3 \end{aligned}$$

行列の積のルールの直観的おぼえ方

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$ もこの一例と思える.
横ベクトルと行列の積. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow$ 縦ベクトルと横ベクトルを区別する必要.
ベクトルの内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は (まだ) 一例とは思えない (型があってない).

単位行列 加藤 線形代数 p.24

定義 7 (単位行列)

n 次の単位行列 E or E_n とは,
n 次正方行列で
(i,j) 成分が $e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ であるものをいう.

行列の積の演算法則 加藤 線形代数 定理 2 – 2

定理 8 (行列の積の演算法則)

以下, 積の型はあっているとする. A は m 行 n 列とする.

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= A(BC) \quad \text{結合法則, 当たり前じゃない} \\
A(B+C) &= AB + AC \quad \text{分配法則 1} \\
(A+B)C &= AC + BC \quad \text{分配法則 2} \\
AE_n &= E_m A = A \quad \text{単位行列の性質} \\
AO_{nk} &= O_{mk}, O_{\ell m} A = O_{\ell n} \\
\text{略記} A^n &= \underbrace{AA \cdots A}_{n} \quad \text{行列のべき乗}
\end{aligned}
$$

ほとんどの場合に成立しない=「成立しない」もの

$AB = BA$ 反例 $\boxed{\text{加藤 線形代数 例 5(p.23)}}$

$AB = O$ ならば($A = O$ または $B = O$) 反例 $\boxed{\text{加藤 線形代数 例 9(p.26)}}$

$\boxed{\text{加藤 線形代数 練習 4,5,6(p.27)}}$, mobius K1.2.30

実数やベクトルの直観を使わず, 上の法則だけを使う

追加課金: 加藤文元, 大学教養線形代数 (青チャート), 数研出版, 2020.

例 $(AB)^2$

例 $(A-B)(A+B)$