第 1 章 行列の概念 (ブロック分け・上下三角行列)

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L09(2022-05-11 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-11 Wed 07:50 JST hig"

今日の目標

- $\sum$ と添字で成分の計算ができる
- 行列をブロック分けして計算できる
- 上/下三角行列, 対角行列の定義に関わる証明ができる

ここまで来たよ

行列の成分表示と $\sum$ の演算 加藤 線形代数 pp.17,24

$A=[a_{ij}]$:「行列 A の成分として a, 行の添字として i, 列の添字として j を使うよ」
$AB=[c_{ik}]$「積 AB の成分を c_{ik} と書くよ」
これを濫用 (?) して, 行列の和を $[a_{ij}]+[b_{ij}]$ と書いたりする.

$[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$「行列 A と B の和の成分は, 成分の和である」

$k[a_{ij}]=[ka_{ij}]$

行列のスカラー倍の成分, は成分のスカラー倍

i	1	2	3	4	5
a	$a_1 = 2$	$a_2 = 3$	$a_3 = 5$	$a_4 = 7$	$a_5 = 11$
b	$b_1 = 111$	$b_2 = 107$	$b_3 = 105$	$b_4 = 103$	$b_5 = 102$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i = 3 + 5 + 7 = \sum_{j=2}^{4} a_j,$$

$$\sum_{i=2}^{4} 2^{a_i} = 2^3 + 2^5 + 2^7,$$

$$\sum_{i=0}^{2} a_{i+2} = 3 + 5 + 7,$$

$$\sum_{k=3}^{5} b_k = 105 + 103 + 102.$$

$$\sum_{i=0}^{2} b_{5-i} = 102 + 103 + 105,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_i = 3 \cdot 107 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 103,$$

$$i = 2, \sum_{j=2}^{4} a_i b_j = 3 \cdot 107 + 3 \cdot 105 + 3 \cdot 103,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_{4-i} = 3 \cdot 103 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 107,$$

$$\vdots$$

mobius K1.1.30

定義 1 (行列の積)

- 行列 A ($\ell \times m$ 型, 成分 a_{ij} $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 B ($m' \times n$ 型, 成分 b_{ij} $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 A, B の積 AB が定義され,

- 行列 $C = AB$ ($\ell \times n$ 型, 成分 c_{ij} $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

積の定義と結合則の証明

型	$\ell \times m$	$m \times n$	$n \times p$	$\ell \times n$	$\ell \times p$	$\ell \times p$
行列	$A = [a_{ij}]$	$B = [b_{jk}]$	$C = [c_{kq}]$	$AB = [d_{ik}]$	$(AB)C = [f_{iq}]$	$A(BC) = [g_{iq}]$

$$
\begin{aligned}
f_{iq} &= \sum_{k=1}^{p} d_{ik} c_{kq} \\
&= \sum_{k=1} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kq} \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \right) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \right) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kq} \right) = g_{iq}.
\end{aligned}
$$

(1) 分配法則 $(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{13}=a_{11}b_{11}c_{13}+a_{12}b_{21}c_{13}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{m}g(k,j)\right)$ って, 結局 $p\times m$ 個に長方形状に並んだ $g(k,j)$ を全部加えろってこと.

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{m}g(k,j)\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p}g(k,j)\right)$$

順序に意味ないから, $\displaystyle\sum_{1\le j\le m,1\le k\le p}$ みたいに書いちゃうこともある.

加藤 線形代数 章末問題 1(p.39)

◆行列の区分け (ブロック分け) 加藤 線形代数 p.27

加藤 線形代数 p.27 の解読

n 行 m 列の行列 $A = [a_{ij}]$ を, 縦横に格子状に分割する. 例えば 2×2.

$$A = \begin{bmatrix} D & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

D, F, G, H は行列. 正方でなくても, 同サイズでなくてもいい. 加藤 線形代数 では $D = A_{11}$ のように書いてあるけど, これは行列 (A の小行列 (submatrix)). 11 は行列につけた番号. $D = A_{11} = [d_{ab}]$.

$$AB = \begin{bmatrix} D & F \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & K \\ L & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & P \\ Q & R \end{bmatrix} = C$$

とする. ここで, B の列の分割 (J, L の境い目) は, D, F の境い目と一致している必要がある.
N, Q の境い目は D, G の境い目, N, P の境い目は J, K の境い目と一致する (行列の型のルールに似てる)

行列の積を 2 段階に分けて, ブロックごとに計算できる

$N = DJ + FL$ 行列の積っぽいルール. 行列の積と和. 順序に意味あり

$DJ = [s_{tv}]$

$s_{tu} = \sum_u d_{tu} j_{uv}$ 行列の積. 成分で書いた

証明 成分で書いてみるとと両辺同じ 加藤 線形代数 例 10(p.28) A, B が ブロック対角である場合

加藤 線形代数 練習 7(p.29) 加藤 線形代数 練習 8(p.29) ブロック対角である場合, ブロック分けで積を考えると楽, という例.

mobius K1.2.50

◆行列の区分け (列ベクトルへの分割) 加藤 線形代数 p.29

ブロック分けの小行列として, 列ベクトルを選んだ場合の一例
加藤 線形代数 p.29 に続いて追加.
3 次の正方行列 C, $A = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3]$ に対して (注: この 1,2,3 は成分でなく, 1,2,3 番目のベクトルという意味).

$$CA = C[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3] = [C\boldsymbol{x}_1\ C\boldsymbol{x}_2\ C\boldsymbol{x}_3].$$

mobius K1.2.50
ブロック分けの小行列として, 行ベクトルを選んだ場合の一例
3 次の正方行列 B を 3 つの行ベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ に分割して $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{bmatrix}$ と書くと,

$$D = BA = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}.$$

すなわち, $D = [d_{ij}]$ とすると, $d_{ij} = \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{x}_j$.

ここまで来たよ

◆上三角行列, 下三角行列, 対角行列 加藤 線形代数 p.37

定義 2 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列)

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列に対して (← 成分は a で書くという意味)

- A が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が対角行列 (diagonal matrix) $\Leftrightarrow (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0)$

$P \Leftrightarrow Q$: P と Q は同値, Q は P の必要十分条件, P を Q で定義する.
$P \Rightarrow Q$: P ならば Q, P は Q の十分条件, Q は P の必要条件, P: 仮定, Q: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

$P\backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	偽	真

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

$P\backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

証明しよう

加藤 線形代数 章末問題 5(p.39) の簡単バージョン
L09-Q1

Quiz(対角行列の積)

n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$,$B = [b_{ij}]$ を考える.

1. A, B が対角行列ならば, 積 AB も対角行列であることを示そう. このとき, AB の対角成分を求めよう.
2. A が対角行列ならば, べき乗 A^k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ も対角行列であることを示そう. このとき, A^k の対角成分を求めよう.

証明「示そう」の書き方

仮定 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 **(ギャップを埋める)** 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, $(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.
「仮定 Q は前に持っていっていい」

L09-Q2

Quiz(三角行列対角行列の和)

1. A, B が n 次の上三角行列ならば, 和 $A + B$ も n 次の上三角行列であることを示そう
2. A, B が n 次の下三角行列ならば, 和 $A + B$ も n 次の上三角行列であることを示そう
3. A, B が n 次の対角行列ならば, 和 $A + B$ も n 次の対角行列であることを示そう.

スカラー倍, 差も同様.

加藤 線形代数 練習 8(p.37)