第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列・逆行列の応用)

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L11(2022-05-18 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-18 Wed 12:29 JST hig"

今日の目標

- 平面の 1 次変換による直線の像を, パラメタ表示と方程式で求められる
- 正則でない行列の表す 1 次変換による直線の像を説明できる

L10-Q1

Quiz 解答: 転置の積の成分表示

${}^{\mathrm{t}}A = [b_{ji}]$ とすると, $b_{ji} = a_{ij}$.

1. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$
2. $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$
3. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$

ここまで来たよ

直線の 1 次変換による像

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ について, 行列 A で表せる 1 次変換 f による像を
$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ とする.
移動前 $\boldsymbol{x}$, 移動後 $\boldsymbol{y}$.
点でなく部分集合について,

定義 1 (写像による部分集合の像 加藤 線形代数 p.191**)**

$f : X \to Y$ を写像とする. 部分集合 $S \subset X$ について, $\{f(x) | x \in S\} \subset Y$ を, 写像 f による S の像という.

パラメタ表示された直線

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ とパラメタ表示される直線の, 行列 A で表される 1 次変換 f による像は?

移動前の点 $\boldsymbol{x}$ が上のパラメタ表示で書ける.
移動後の $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. A が正則行列なら, 左から A^{-1} をかけて $A^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$.
これをパラメタ表示に代入して,

$$A^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} \quad (t \in \mathbb{R})$$

両辺に左から A をかけて,

直線の 1 次変換による像のパラメタ表示

直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ の, 行列 A で表される 1 次変換 f による像は, 次のようにパラメタ表示される. $A\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, これは直線.

$$\boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{a})t + (A\boldsymbol{c}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

もっとも. なぜなら, $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, t \in \mathbb{R}\}$ の各点の f による像を考えて,
$\{A\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\} = \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{a})t + A\boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\}$.

L11-Q1

Quiz(パラメタ表示された直線の 1 次変換による像)

パラメタ表示

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

をもつ $\mathbb{R}^2$ の直線 ℓ を考える.

1. 点 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ はそれぞれ ℓ 上にあるか調べよう.
2. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 f による ℓ の像を求めよう.
3. 原点のまわりに反時計回りに $\frac{1}{2}\pi$ 回転する 1 次変換 $R_{\pi/2}$ による ℓ の像を求めよう.

直線の 1 次変換による像の方程式

方程式 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=0$ で表される直線の, 行列 A で表される 1 次変換 f による像は?

パラメタ表示との関係 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$ なら, 方程式の $\boldsymbol{x}$ にパラメタ表示を入れると成立してる
まず内積をやめて転置を使って行列で書く. $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}={}^{t}\boldsymbol{n}\boldsymbol{c}$.

$$ {}^{t}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=0 $$

移動前の点 $\boldsymbol{x}$ が上の方程式にしたがう. (A が正則行列なら) $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{y}$.
これを代入し, $E=A^{-1}A$ で細工して

$$
\begin{aligned}
{}^{t}\boldsymbol{n}(A^{-1}\boldsymbol{y}-(A^{-1}A)\boldsymbol{c}) &=0\\
{}^{t}\boldsymbol{n}A^{-1}(\boldsymbol{y}-A\boldsymbol{c}) &=0\\
{}^{t}({}^{t}(A^{-1})\boldsymbol{n})(\boldsymbol{y}-A\boldsymbol{c}) &=0\\
({}^{t}(A^{-1})\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{y}-A\boldsymbol{c}) &=0
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{c}$ は 1 次変換 A で移動, $\boldsymbol{n}$ は ${}^{t}(A^{-1})$ で移動.

L11-Q2

Quiz(方程式で定まる直線の 1 次変換による像)

方程式

$$(\boldsymbol{x} - \left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]) \cdot \left[\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right] = 0$$

で定まる $\mathbb{R}^2$ の直線 ℓ を考える.

1. 点 $\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix}4\\-5\end{smallmatrix}\right]$ はそれぞれ ℓ 上にあるか調べよう.
2. 行列 $A = \left[\begin{smallmatrix}2&3\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ で表される 1 次変換 f による ℓ の像を求めよう.
3. 原点のまわりに反時計回りに $\frac{1}{2}\pi$ 回転する 1 次変換 $R_{\pi/2}$ による ℓ の像を求めよう.

転置と逆

$({}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = ({}^{\mathrm{t}}A)^{-1}$ は成立するか?

アドバイス 難しい問はまず 2 次行列や例で考えてみる. 反例が見つかったらもうけもの.

A が正則じゃないとき直線の像は?

L11-Q3

Quiz(対角行列の積)

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換を考える.

1. 直線 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の像を求めよう.
2. 点 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の像を求めよう.
3. 点 $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の像を求めよう. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の張る正方形の像を想像しよう.

実は, $\mathbb{R}^2$ で

1. 正則行列の表す 1 次変換の値域は 自分の言葉で.
2. 正則でない行列の表す 1 次変換の値域は 自分の言葉で.

数学教職の人はどんな勉強?

- 教職ガイダンス
- 数学科でのゼミ (セミナー) とは?
- 自主ゼミとは

ここまで来たよ

◆上三角行列, 下三角行列, 対角行列 加藤 線形代数 p.37

定義 2 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列)

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

- A が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が対角行列 (diagonal matrix) $\Leftrightarrow (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0) \Leftrightarrow$「対角成分以外ゼロ」
- A が対称行列 (symmetric matrix) $\Leftrightarrow A = +\,{}^{\mathrm{t}}A$.
- A が反対称行列 (anti-symmetric matrix) $\Leftrightarrow A = -\,{}^{\mathrm{t}}A$.

$P \Leftrightarrow Q$: P と Q は同値, Q は P の必要十分条件, P を Q で定義する.
$P \Rightarrow Q$: P ならば Q, P は Q の十分条件, Q は P の必要条件, P: 仮定, Q: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

$P\backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	偽	真

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

$P\backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

対角行列

n 次対角行列

具体的な表示

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Huge 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

対角行列全体は, n 次正方行列の中で, 扱いの簡単なファミリーになっている (部分ナントカ). 線形代数 II(後期), 代数 (3 年)

何か計算していて対角行列にできたらラッキー 対角化 線形代数 II(後期)

一方, 行列の例としては簡単すぎ (対角行列 A, B に対しては $AB = BA$ とか).

証明の書き方

加藤 線形代数 章末問題 5(p.39) の簡単バージョン
L11-Q4

Quiz(対角行列の積)

n 次の正方行列 $A = [a_{ik}]$,$B = [b_{kj}]$ を考える.

1. A, B が対角行列ならば, 積 AB も対角行列であることを示そう. このとき, AB の対角成分を求めよう.
2. D が対角行列ならば, べき乗 D^m $(m = 1, 2, \ldots)$ も対角行列であることを示そう. このとき, D^m の対角成分を求めよう.

A^0, A^{-m} の定義. e^A の定義.
証明「示そう」の書き方 1(構成的)
具体的に積を求め, それが条件を満たすこと言う.

証明「示そう」の書き方 2

具体的に積を求めず, 積が条件を満たすこと言う.

仮定 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 **(ギャップを埋める)** 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, $(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.

「仮定 Q は前に持っていっていい」

証明の書き方と反例のみつけかた

対角行列と正則行列

対角行列は正則行列か? そうなら証明し, 違うなら反例を挙げよう.

アドバイス

- 反例は 1 個でもあればいい
- 例で考えよう
- 低い次元で考えよう (反例なら 1 個あれば OK, 証明ならそこから一般の次元に).

対角行列の逆行列

対角行列の逆行列はどのような形か?

- 定義から
- やまかんで構成して証明する