第 1 章 行列の概念 (上下三角行列対角行列と証明)

樋口さぶろお　`https://hig3.net`

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L12(2022-05-20 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-20 Fri 06:47 JST hig"

今日の目標

- 空間の 1 次変換の行列を書ける
- 上下三角, 対角, 対称行列の定義を使った証明ができる

L11-Q1
Quiz 解答: パラメタ表示された直線の 1 次変換による像

1. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ は解 $t = 1$ を持つので $\boldsymbol{x}_1$ は ℓ 上にある.
   $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ は解 $t = 1$ を持たないので $\boldsymbol{x}_2$ は ℓ 上にない.
2. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$.
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. よって, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$.

L11-Q2
Quiz 解答: 方程式で定まる直線の 1 次変換による像

1. 代入してみると, $\boldsymbol{x}_1$ は方程式を満たす (方程式の解である) ので, $\boldsymbol{x}_1$ は ℓ 上にある. $\boldsymbol{x}_2$ は方程式を満たさない (方程式の解でない) ので, $\boldsymbol{x}_2$ は ℓ 上にない.
2. ${}^{\mathrm{t}}A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.
$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$
3. ${}^{\mathrm{t}}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$.
$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

ここまで来たよ

A が正則じゃないとき直線の像は? I

L12-Q1

Quiz(対角行列の積)

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換を考える.

1. 直線 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の像を求めよう.
2. 点 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の像を求めよう.
3. 点 $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の像を求めよう. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の張る正方形の像を想像しよう.

実は, $\mathbb{R}^2$ で

1. 正則行列の表す 1 次変換の値域は 自分の言葉で.
2. 正則でない行列の表す 1 次変換の値域は 自分の言葉で.

ここまで来たよ

11 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列・逆行列の応用)

12 第 1 章 行列の概念 (上下三角行列対角行列と証明)
- 第 0 章 4'. 直線の写像による像
- 3 次元空間の 1 次変換
- 上三角行列, 下三角行列, 対角行列

3 次元空間の 1 次変換

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を 3 次の正方行列 A で移動させることができる.

z 軸を回転軸とする xy 平面内の回転 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & +\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

x 軸を回転軸とする yz 平面内の回転 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix}$

xz 平面 (平面 $y=0$) に関する対称変換 (鏡映) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

平面 $x=y$ に関する対称変換 (鏡映) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

L12-Q2

Quiz(3 次元の回転)

y 軸を回転軸とする, xz 平面内の角 θ の回転の線形変換 (1 次変換) を表す行列を書こう. ただし, どっちまわりを正の θ にするかは自由に決めてよい.

このページ内の 1 次変換は, すべて正則行列で表示されるものとする.

3 次元空間内の直線, 平面の 1 次変換による像

- 3 次元空間内のパラメタ表示された直線の, 1 次変換による像は, 2 次元空間内のパラメタ表示された直線の場合と同じ式で求められる.
- 3 次元空間内のパラメタ表示された平面の, 1 次変換による像は, 2 次元空間内のパラメタ表示された直線の場合と同じ式で求められる.
- 3 次元空間内の方程式で定まる平面の, 1 次変換による像は, 2 次元空間内の方程式で定まる直線の場合と同じ式で求められる.

n 次元空間内の k 次元部分空間の 1 次変換による像

- n 次元空間内のパラメタ表示された k $(1 \leq k \leq n)$ 次元部分空間の, 1 次変換による像は, 2 次元空間内のパラメタ表示された直線の場合と同じ式で求められる.
- n 次元空間内の方程式で定まる $n-1$ 次元部分空間の, 1 次変換による像は, 2 次元空間内の方程式で定まる直線の場合と同じ式で求められる.

3 次元の回転行列とオイラー角

2 次元の回転行列は 1 パラメタ θ
3 次元の任意の回転は, 3 パラメタ必要 (フライトシミュレータでヨー, ピッチ, ローがあるのはそのため).
オイラー角 ψ, θ, ϕ にとることが多い.
3 次元の回転行列は, 角 ψ, θ, ϕ の平面回転の合成 (行列の積) で書ける.

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

http://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrAM/sim/EulerAngle.html

ここまで来たよ

11 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列・逆行列の応用)

12 第 1 章 行列の概念 (上下三角行列対角行列と証明)
- 第 0 章 4'. 直線の写像による像
- 3 次元空間の 1 次変換
- 上三角行列, 下三角行列, 対角行列

◆上三角行列, 下三角行列, 対角行列 加藤 線形代数 p.37

定義 1 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列)

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

- A が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が対角行列 (diagonal matrix) $\Leftrightarrow (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0) \Leftrightarrow$「対角成分以外ゼロ」
- A が対称行列 (symmetric matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = +\,{}^{t}A$.
- A が反対称行列 (anti-symmetric matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = -\,{}^{t}A$.

$P \Leftrightarrow Q$: P と Q は同値, Q は P の必要十分条件, P を Q で定義する.
$P \Rightarrow Q$: P ならば Q, P は Q の十分条件, Q は P の必要条件, P: 仮定, Q: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

$P\backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	偽	真

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

$P\backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

対角行列

n 次対角行列

具体的な表示

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \Large 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \Large 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

ギリシャ文字ラムダ, 小文字 λ, 大文字 Λ.
対角行列全体は, n 次正方行列の中で, 扱いの簡単なファミリーになっている (部分ナントカ). 線形代数 II(後期), 代数 (3 年)
何か計算していて対角行列にできたらラッキー 対角化 線形代数 II(後期)
一方, 行列の例としては簡単すぎ (対角行列 A, B に対しては $AB = BA$ とか).

証明の書き方

加藤 線形代数 章末問題 5(p.39)の簡単バージョン
L12-Q3

Quiz(対角行列の積)

n 次の正方行列 $A = [a_{ik}]$,$B = [b_{kj}]$ を考える.

1. A, B が対角行列ならば, 積 AB も対角行列であることを示そう. このとき, AB の対角成分を求めよう.
2. A が対角行列ならば, べき乗 A^m $(m = 1, 2, \ldots)$ も対角行列であることを示そう. このとき, D^m の対角成分を求めよう.

mobius K1.3.70
A^0, A^{-m} の定義. e^A の定義.
証明「示そう」の書き方 1(構成的)
具体的に積を成分で求め, それが条件を満たすこと言う.

証明「示そう」の書き方 2(非構成的) 具体的に積を求めず, 積の成分が条件を満たすことを言う.

仮定 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 **(ギャップを埋める)** 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, $(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.
「仮定 Q は前に持っていっていい」

証明の書き方と反例のみつけかた

対角行列と正則行列

対角行列は正則行列か? そうなら証明し, 違うなら反例を挙げよう.

アドバイス

- 反例は 1 個でもあればいい
- 例で考えよう
- 低い次元で考えよう (反例なら 1 個あれば OK, 証明ならそこから一般の次元に).

対角行列の逆行列

対角行列の逆行列を求めよう

- やまかんで (または下心を隠して) 構成して, 定義を満たすことをいう

- 構成的 加藤 線形代数 章末問題 6(p.39) (両辺を成分で計算して等しいことを言う)
- 構成的 加藤 線形代数 練習 8(p.37), 加藤 線形代数 章末問題 4(p.37)
- 非構成的 加藤 線形代数 章末問題 5(p.39), 加藤 線形代数 章末問題 2(p39)
- そういう分類でない 加藤 線形代数 章末問題 1(p.39)