第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式と行列)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L13(2022-05-25 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-25 Wed 15:31 JST hig"

今日の目標

- 上下三角, 対角, 対称行列の定義を使った証明ができる
- 連立 1 次方程式とその同値変形を行列で書ける

L12-Q1

Quiz 解答: 対角行列の積

L12-Q2

Quiz 解答:3 次元の回転

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

L12-Q3

Quiz 解答: 対角行列の積

$AB = [c_{ij}]$ とする.

1 構成的

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ii} \delta_{ik} b_{kk} \delta_{kj}
\end{aligned}
$$

$\sum_k \delta_{ik} \bullet$ を実行して $k = i$ を代入することで,

$$
c_{ij} = a_{ii} b_{ii} \delta_{ij}.
$$

よって, AB は $a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn}$ を対角成分とする対角行列.

1 非構成的
(仮定) A, B を対角行列とする.
(式で) すなわち $i \neq k$ ならば $a_{ik} = 0$, $k \neq j$ ならば $b_{kj} = 0$ である.
$i \neq j$ とする.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

だが, $i \neq j$ なので, $i = k = j$ となる項はない. すなわち, $i \neq k$ または $k \neq j$. すなわち, $a_{ik} = 0$ または $b_{kj} = 0$. よって, $c_{ij} = 0$.
よって, $i \neq j \Rightarrow c_{ij} = 0$.
すなわち, AB は対角行列. (このやり方では対角成分はわからない (非構成的)).

2 対角成分は, $(a_{11})^m, (a_{22})^m, \ldots, (a_{nn})^m$. (厳密には数学的帰納法で)

和 $\sum$ とクロネッカー記号 δ_{ij} の補足

和 $\sum$ 内のクロネッカー記号 δ_{ij}

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} F_{ijkl}G_{ijkm}\delta_{ij} \\
=&F_{ijkl}G_{i1km}\delta_{i1} + \cdots + F_{iikl}G_{iikm}\delta_{ii} + \cdots + F_{inkl}G_{inkm}\delta_{in} \\
=&0 + \cdots + 0 + F_{iikl}G_{iikm} \cdot 1 + 0 + \cdots + 0 \\
=&F_{iikl}G_{iikm}
\end{aligned}
$$

F, G が別の $\sum$ や δ を含んでいてもかまわない.

$\sum$ と δ_{ij} の計算の例題

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{i1}F_{ijk} = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{k1}F_{ijk} = ?$$

証明の書き方

P ならば R, $P \Rightarrow R$ の証明

P とする

$\vdots$

$\boxed{R}$

よって $P \Rightarrow R$.

P ならば (Q ならば R), $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ の証明

P とする

$\vdots$

Q とする

$\vdots$

R

よって $Q \Rightarrow R$

よって $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

構成した者勝ちの証明の書き方

対角行列の逆行列

正則である対角行列の逆行列を求めよう

- やまかんで (または下心を隠して) 構成して, 定義を満たすことをいう

- 構成的 加藤 線形代数 章末問題 6(p.39) (両辺を成分で計算して等しいことを言う)
- 構成的 加藤 線形代数 練習 8(p.37), 加藤 線形代数 章末問題 4(p.37)
- 非構成的 加藤 線形代数 章末問題 5(p.39), 加藤 線形代数 章末問題 2(p39)
- そういう分類でない 加藤 線形代数 章末問題 1(p.39)

ここまで来たよ

◆連立 1 次方程式の書き方 加藤 線形代数 p.41

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\quad \cdots + a_{1n}x_n &= \quad b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\quad \cdots + a_{mn}x_n &= \quad b_m \end{aligned}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\text{係数行列} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

$$\text{未知数ベクトル} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{定数項ベクトル} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$\text{拡大係数行列} \tilde{A} = \left[\, A |\, \boldsymbol{b} \right].$$

◆連立 1 次方程式を解く 加藤 線形代数 p.43

- 「系統的な」解法 (=拡大係数行列を入力, 解を出力とするアルゴリズム) そのもの自身を研究したい
  - その解法は必ず解を出力するのか?
  - 何ステップかかるのか?
- ここでは加減法のみを調べることにして, 代入法は考えない
- 最初に与えられたのと同じ個数 (m 個) の等式をキープして, 同値変形だけを行っていく
- 特定の許された操作のみを行う.

ここまで来たよ

◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

行列の行基本操作

$(i), (j)$ は拡大係数行列の行番号 (加藤 線形代数 では○の中に i, j)

(R1) $(i) \leftrightarrow (j)$
(R2) $(i) \times (定数c)$
(R3) $(i) \times (定数a) + (j)$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49)

mobius K2.1.30