第 2 章 連立 1 次方程式 (行列の行基本変形)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L14(2022-05-27 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-07 Tue 10:59 JST hig"

今日の目標

- 行基本操作を説明できる
- 行階段形, その主成分, 階数の定義を説明できる
- 行簡約階段形の定義を説明できる

ここまで来たよ

◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

行列の行基本操作 (elementary row operations)

$[i], [j]$ は拡大係数行列の行番号 (加藤 線形代数 では○の中に i, j)

(R1) $[i] \leftrightarrow [j]$, $i \neq j$
(R2) $[i] \times (\text{定数}c)$, $c \neq 0$
(R3) $[j] \times (\text{定数}a) + [i]$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49) mobius K2.1.30

行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

行基本操作の可逆性

加藤 線形代数 p.49

行基本操作は, 別の行基本操作 (逆操作) で元に戻せる. だから連立 1 次方程式の変形としては同値.

(R1) $[i] \leftrightarrow [j]$ の逆操作は$\cdots$
(R2) $[i] \times (\text{定数}c)$ $c \neq 0$ の逆操作は$\cdots$
(R3) $[j] \times (\text{定数}a) + [i]$ $i \neq j$ の逆操作は$\cdots$

L14-Q1

Quiz()

1. 連立 1 次方程式

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_3 &= 19 \\
3x_1 + x_2 &= 24 \\
x_1 &= 7
\end{aligned}
$$

を行列で書いたときの拡大係数行列 $\tilde{A}$ を右側に並べて書こう.

2. 下方向に, 1 度には R1, R2, R3 を 1 個ずつ使い ($[1] \times (-3) + [3]$ のような 記号を記すこと), 最終的に $\begin{matrix} x_1 = \text{数} \\ x_2 = \text{数} \\ x_3 = \text{数} \end{matrix}$ になるように連立 1 次方程式と行列を変形していこう.

(行) 階段形 (ref=row echelon form)

加藤 線形代数 定義 2-1(p.50)

定義 1 ((行) 階段形 (row echelon form))

m 行 n 列の行列 $A = [a_{ij}]$ が階段形 $\Leftrightarrow$ 加藤 線形代数 p.51) 参照

A の階数 (rank) $r = \mathrm{rank}A$「段の個数」

主番号 整数 $1 \le c_1 < c_2 < \ldots < c_r \le n$「段の横方向の位置 (列番号)」

主列 A の第 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ 列

A の $i = 1, 2, \ldots, r$ 番目の主成分 (ピボット) 成分 a_{ic_i}「階段の角」

そうである例

加藤 線形代数 例 1(p.50) ,aE

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 練習 2(p.52)

そうでない例

加藤 線形代数 注意 (p.51)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

◆ (行) 簡約階段形 (rref=reduced row echelon form)

加藤 線形代数 定義 2-2(p.52)

定義 2 ((行) 簡約階段形 (reduced row echelon form))

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ が簡約階段形

$\Leftrightarrow$

- E1 A か階段形
- E2 主成分がすべて 1
- E3 各主列における主成分の上下の成分がすべて 0

そうである例 加藤 線形代数 例 2(p.53)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

階段形だが簡約階段形でない例

加藤 線形代数 例 1(p.50), $aE(a \neq 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 練習 4(p.53)

◆行基本変形定理

加藤 線形代数 定理 2-1(p.53)

定理 3 (行基本変形定理)

任意の行列 A は, 適当な行基本変形によって, 簡約階段形に変形できる.
変形後の行列 (A の簡約階段化) はただ一つに定まる加藤 線形代数 注意 (p.58).

驚いて疑ってほしい定理
証明+掃き出し法加藤 線形代数 p.53–57はそれ自身重要だが説明延期

◆行列の階数

加藤 線形代数 定義 2-3(p.58)

定義 4 (行列の階数)

行列 A の簡約階段化の階数を, A の階数といい $\mathrm{rank}A$ と書く.

加藤 線形代数 練習 8,9(p.59)

定理 5 (階数の性質)

$m \times n$ 行列 A について, 次の不等式が成り立つ.

$\mathrm{rank}A \leq m, \mathrm{rank}A \leq n.$