第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式)

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L16(2022-06-03 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-03 Fri 06:38 JST hig"

今日の目標

- 拡大係数行列が与えられたとき, 解の存在の有無, 自由度を求められる
- 同次連立 1 次方程式が与えられたとき, 非自明な解の存在の有無を求められる

ここまで来たよ

(解が存在する場合の) 解き方 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. 拡大係数行列 $\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$.

簡約階段形の拡大係数行列を持つ連立 1 次方程式の解き方

1. 主列以外の列の変数 (未知数) を, 任意定数 (パラメタ) $c, d, \cdots \in \mathbb{R}$ とおく. その個数を解の自由度 (degree of freedom) という.
2. 主列に対応する変数は, これらの任意定数で書ける.

解の自由度が正 $\Leftrightarrow$ 無限個の解が存在する.

例 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

加藤 線形代数 練習 2(p.54), 章末問題 2(p.72)

解全体の集合は点?直線?平面?

解空間=解全体の集合 加藤 線形代数 p.160

以下, 任意定数 $c, d \in \mathbb{R}$.

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ (平面上の点)

解空間は 1 点, 自由度 0, 解は一意的に定まる

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & 3 \end{array} \rightsquigarrow 1\text{点}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

解空間は 1 直線. 自由度 1, 無限個の解が存在する

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 - 5c \\ x_2 & = & c \end{array} \rightsquigarrow 1\text{直線}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

解空間は 1 平面. 自由度 2, 無限個の解が存在する

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & c \\ x_2 & = & d \end{array} \rightsquigarrow 1\text{平面}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ (空間内の点)

解空間は 1 点, 自由度 0, 解は一意に定まる

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 11 \end{aligned} \rightsquigarrow 1\text{ 点}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

解空間は 1 直線. 自由度 1, 無限個の解が存在する

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 - 7c \\ x_2 &= 3 - 9c \\ x_3 &= c \end{aligned} \rightsquigarrow 1\text{ 直線}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

解空間は 1 平面. 自由度 2, 無限個の解が存在する

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 - 5c - 3d \\ x_2 &= c \\ x_3 &= d \end{aligned} \rightsquigarrow \text{平面}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

解なしの例

拡大係数行列

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆解の存在

加藤 線形代数 定理 3-2(p.65)

定理 1 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度)

A を $m \times n$ 行列とする.
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (*) の拡大係数行列 $\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$ とする.

1. (*) が解を持たない $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A < \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$.
2. (*) が解を持つ $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$. (†)
3. (†) が成り立つとき, (*) の解の自由度は $n - \operatorname{rank} A$.

(†) が成り立つとき, 解の自由度が 0 なら解は一意に定まる, 正なら無限個の解が存在する.

加藤 線形代数 例題 3(p.68), 加藤 線形代数 練習 4(p.69)

加藤 線形代数 系 3-1(p.67)

系 2 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度)

A を $m \times n$ 行列とする.
$m = \operatorname{rank} A$ ならば
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持ち, 解の自由度は $n - m$.

「フルランクのとき, 変数の個数 $n-$ 方程式の数 m で決まる」

定理と同類の名前

主張の格は, 高いほうから

○○定理	○○ Theorem 特に重要な定理
定理	Theorem 重要で著者が特に主張したい命題
命題, 主張	Proposition, Assertion 定理ほどは重要じゃない命題
事実	Fact 命題と同じだけど, 証明が難しすぎて主張だけいうときによく使われる?
系	Corollary 重要かもしれないけど定理から簡単に導ける命題
補題, 補助定理	Lemma 定理を証明するために, あらかじめ証明する (技術的な) 命題

数学書のありがちなスタイル. 定義-定理 (や同類のやつ)-証明, 定義-定理 (や同類のやつ)-証明

ここまで来たよ

◆同次連立 1 次方程式

定義 3 (同次連立 1 次方程式)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が

1. 同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
2. 非同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

同次=斉次=homogeneous(等質)=次数が同じ (今の場合, 各項が 1 次)

命題 4

同次方程式はつねに自明 (trivial) な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を持つ

証明: 同次連立 1 次方程式では $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}[A|\boldsymbol{b}]$.

定義 5 (非自明な解)

同次方程式の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を非自明 (non-trivial) な解という

英単語自明はいろんな文脈でも登場.「わかりきった」?

加藤 線形代数 定理 3-3(p.69)

定理 6 (同次連立 1 次方程式の非自明な解の存在)

A を $m \times n$ 行列とする.
同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (**) は

1. $\mathrm{rank}\, A = n \Rightarrow$ (**) は自明な解しか持たない
2. $\mathrm{rank}\, A < n \Rightarrow$ (**) は非自明な解を持つ

- $\boldsymbol{0}$ は自明な解.
  - 同次連立 1 次方程式の解空間の直線や平面は原点を通る.
- 自明な解しか持たないなら, 解は一意に定まる.
  - 解空間が 1 点の場合のこと.
- 非自明な解が存在するなら, 無限個の解が存在する.
  - 解空間が直線や平面のときが, 非自明な解があるとき.

加藤 線形代数 例題 4(p.70), 例題 5(p.70), 章末問題 3(p.72)