第 3 章 行列の構造 (基本行列と基本変形)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L17(2022-06-08 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-08 Wed 11:01 JST hig"

今日の目標

- 行/列基本操作と, 基本行列を左右からかけることとの対応を説明できる

ここまで来たよ

◆基本行列 加藤 線形代数 p.75

$P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ はいずれも, 単位行列をちょっと変更した m 次正方行列.
P_{ij}, P_i の ij は基本行列の番号. $a_{k\ell}$ の $k\ell$ は行番号列番号.

P_{ij}

例: 3 次の $P_{12} = P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
$P_{ij} = [a_{k\ell}]$ とすると,

$$a_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 - \delta_{ik} - \delta_{j\ell}) + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}.$$

$P_i(c)$

例: 3 次の $P_2(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
$P_i(c) = [b_{k\ell}]$ とすると,

$$b_{k\ell} = \delta_{k\ell} + (c-1)\delta_{ik}\delta_{i\ell}$$

$P_{ij}(a)$

例: 3 次の $P_{23}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{31}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$P_{ij}(a) = [c_{k\ell}]$ とすると,

$$b_{k\ell} = \delta_{k\ell} + a\delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

行基本操作 (復習) 加藤 線形代数 p.48 線形代数☆演習 I(2022)L15

行列の行基本操作 (elementary row operations)

$[i], [j]$ は行列の行番号 (加藤 線形代数 では○の中に i, j)

(R1) $[i] \leftrightarrow [j]$, $i \neq j$
(R2) $[i] \times (\text{定数}c)$, $c \neq 0$
(R3) $[j] \times (\text{定数}a) + [i]$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column
これらは可逆
行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

◆基本行列と行基本変形 加藤 線形代数 p.76

行基本操作 $\leftrightarrow$ 基本行列の左からの積

$m \times n$ 行列 A に対して, 行基本操作は m 次の基本行列を左からかけるのと同じ

(R1) P_{ij} を左からかける
(R2) $P_i(c)$ を左からかける
(R3) $P_{ij}(a)$ を左からかける $[j] \times (a) + [i]$.

加藤 線形代数 練習 2(p.77) mobius K3.1.10

行基本変形 基本行列の積を左からかけるのと同じ
「まず (R1), つぎに (R3)」は $P_{23}(a)(P_{12}A)$ なので, 行列の積
$Q = P_{23}(5)P_{12}$.

加藤 線形代数 例 1, 練習 3(p.77) mobius K3.1.30

例

$$P_{12}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{bmatrix}$$

$P_3(5)F = [g_{kp}]$ とする.

$$g_{kp} = \sum_{\ell} b_{k\ell} f_{\ell p} = (\delta_{k\ell} + (5-1)\delta_{3k}\delta_{3\ell}) f_{\ell p} =$$

例

$$P_{23}(5)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} = \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

L17-Q1

Quiz(基本行列)

行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ を考える.

1. A を行基本変形で簡約階段形にしよう.
2. 上で求めた行基本変形に現れた基本操作それぞれに対応する基本行列 $Q_1, Q_2, \ldots$ を書こう.
3. 上で求めた基本行列の積 Q を求めよう.
4. QA が簡約階段形であることを確かめよう.

加藤 線形代数 定理 1-1(p.77)　これは行基本変形定理 加藤 線形代数 定理 2-1(p.53) の言い換え

定理 1 (行基本変形定理 (その 2))

任意の $m \times n$ 行列 A に対して, $B = Q_1 Q_2 \cdots Q_s A$ が簡約階段形の行列となるような m 次の基本行列 $Q_1, \ldots, Q_s$ が存在する.

証明 最初の基本操作に対応する行列が $Q_s, \ldots,$ 最後の基本操作に対応する行列が Q_1.

ここまで来たよ

◆列基本変形 加藤 線形代数 p.78

行列の列基本操作 (elementary column operations)

$[i$列$], [j$列$]$ は行列の列番号 (加藤 線形代数 では□の中に i, j)

(C1) $[i$列$] \leftrightarrow [j$列$]$, $i \neq j$
(C2) $[i$列$] \times$ (定数c), $c \neq 0$
(C3) $[j$列$] \times$ (定数a) $+ [i$列$]$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column
これらは可逆
列基本変形 列基本操作を繰り返して行列を変形すること

加藤 線形代数 練習 4(p.78)

◆基本行列と列基本変形 加藤 線形代数 p.79

列基本操作 $\leftrightarrow$ 基本行列の右からの積

$m \times n$ 行列 A に対して, 列基本操作は n 次の基本行列を右からかけるのと同じ

(C1) P_{ij} を右からかける
(C2) $P_i(c)$ を右からかける
(C3) $P_{ji}(a)$ を右からかける $[j\text{列}] \times (\text{定数}a) + [i\text{列}]$

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} P_{12}(2) =$$

加藤 線形代数 練習 5(p.80) mobius K3.1.50

列基本変形 基本行列の積を右からかけるのと同じ

「まず (C1), つぎに (C3)」は $(AP_{12})P_{23}(5)$ は, 行列の積 $P = P_{12}P_{23}(5)$.

加藤 線形代数 練習 6(p.80)

◆行列の標準形

加藤 線形代数 定理 1-2(p.81) と同じことをちょっと違った日本語で言ってみる

定理 2 (行列の標準形)

任意の $m \times n$ 行列 A に対して,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ \text{\huge 0} & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

(「最初の $r = \operatorname{rank} A$ 個の対角成分のみ 1, 他はぜんぶ 0」) の形の $m \times n$ 行列 B が一意的に存在して, 適当な

- m 次の基本行列の積 Q
- n 次の基本行列の積 P

で, $QAP = B$ とできる

一意性の証明 A の階数だけで決まるから.

定義 3 (行列の標準形)

上の B を, A の標準形という.

一意だから, そう定義してよい.

存在の証明「行基本変形, 列基本変形で B に到達する」アルゴリズムを与える. 加藤 線形代数 p.81. このアルゴリズムは手計算でも使う.

- A をまず行基本変形で簡約階段形にする.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- 主列以外の列 [i列] の非零成分 a は, 主列 j で, [j列] $\times (-a) +$ [i列] で 0 にできる.
- 主列以外の列 [i列] が $\mathbf{0}$ のとき, 主列 j と [j列] $\leftrightarrow$ [i列] で交換して右側に持っていく.

加藤 線形代数 例題 1(p.83), 練習 7(p.83), 章末問題 (p.94)