第 3 章 行列の構造 (正則行列)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L18(2022-06-10 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-10 Fri 07:30 JST hig"

今日の目標

- 正則行列の判定条件を説明できる
- 正則行列の判定条件を適用できる

L17-Q1
Quiz 解答: 基本行列

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R1 } [1]\leftrightarrow[3]} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R2 } [2]\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R3 } [2]\times 2+[1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
2. A が 3×2 行列なので, 3 次の基本行列を使う.
   [Q_i の変数名は自由. 各行列と, 次の問の Q が正しければよい.]
   - R1 $[1] \leftrightarrow [3]$ $\quad Q_1 = P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   - R2 $[2] \times \frac{1}{3}$ $\quad Q_2 = P_2(\frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   - R3 $[2] \times 2 + [1]$ $\quad Q_3 = P_{12}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. $Q = Q_3 Q_2 Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
4. $QA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ここまで来たよ

正則行列 (復習)

加藤 線形代数 p.32 | 線形代数☆演習 I(2022)L10

定義 1 (正則行列と逆行列)

n 次正方行列 A に対して, $XA = AX = E$ となる n 次行列が存在するとき, A を正則行列 (non-singular matrix) といい, X は A の逆行列 (inverse matrix) であるという.

$n = 2$ は $\Delta \neq 0$ のとき正則で A^{-1} の公式あり.

定理 2 (正則行列の性質)

積 A, B が正則行列 ならば, AB も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
逆 A が正則行列 ならば, A^{-1} も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$.
転置 A が正則行列 ならば, ${}^{\mathrm{t}}A$ も正則行列で, $({}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(A^{-1})$.

◆基本行列の正則性 加藤 線形代数 p.84

加藤 線形代数 定理 2-1(p.84)

定理 3 (基本行列の正則性)

- n 次の基本行列 $P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n.\ i \neq j, c \neq 0)$ はすべて正則行列.
- 逆行列は次の通り.
  - $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.
  - $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$.
  - $P_{ij}(a)^{-1} = P_{ij}(-a)$.

'基本行列の逆行列はまた基本行列'

基本行列の正則性の証明 加藤 線形代数 p.84

下心 基本操作は可逆だから, 逆操作の行列が逆行列になってるはず.

加藤 線形代数 練習 1(p.85)

証明 (構成的 1)

L18-Q1

証明 (構成的 1')

$P_i(c) = [b_{k\ell}]$ としたとき, $b_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 + (c-1)\delta_{ik})$ であることを利用して, $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$ であることを示そう.

加藤 線形代数 定理 1-1(p.77) 定理 1-2(p.81) の系

系 4

任意の $m \times n$ 行列 A について,

- QA が簡約階段行列となる m 次正則行列 Q が存在する.
- QAP が標準形となる n 次正則行列 P が存在する.

一意ではない

証明 定理の証明で, $Q = Q_s \cdots Q_1$, $P = P_t \cdots P_1$ とすると, Q, P は正則行列の積なので, やはり正則行列.

◆正則行列の構造

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)

定理 5 (正則行列の構造)

n 次正方行列について次の 4 つの条件は同値

(a) A は正則行列
(b) $\mathrm{rank}\ A = n$　　‘フルランク’, 簡約階段形が単位行列
(c) A は有限個の基本行列の積で書ける
(d) 待て 加藤 線形代数 4 章

$n = 2$ のときの話とあってる?

証明

補助定理 加藤 線形代数 例題 1, 練習 2, 練習 3(p.86) を準備した上で,
(a)⇒(b)⇒(c)⇒(a) を示す.
(a)⇒(b) 部分は, 対偶 (contraposition)「((b) でない)⇒((a) でない)」を示すことによる.

補助定理

n 次正方行列 A について 加藤 線形代数 p.88

1. 加藤 線形代数 例題 1 n 行目が ${}^{t}\mathbf{0}$ なら A は正則でない
2. n 列目が $\mathbf{0}$ なら A は正則でない
3. 加藤 線形代数 練習 2 i 行目が ${}^{t}\mathbf{0}$ なら A は正則でない
4. 加藤 線形代数 練習 2 j 列目が $\mathbf{0}$ なら A は正則でない
5. 加藤 線形代数 練習 3 i 行目と j 行目 $(i \neq j)$ が一致するなら A は正則でない
6. 加藤 線形代数 練習 3 i 列目と j 列目 $(i \neq j)$ が一致するなら A は正則でない
7. i 行目が, j 行目 $(i \neq j)$ の c 倍なら A は正則でない
8. i 列目が, j 列目 $(i \neq j)$ の c 倍なら A は正則でない
9. j 行目の a 倍を, i 行目に加えたものが, k 行目 $(k \neq i)$ に等しいなら A は正則でない
10. j 列目の a 倍を, i 列目に加えたものが, k 列目 $(k \neq i)$ に等しいなら A は正則でない

補助定理の証明の例

(一般に n 次の正則行列 A, B: 正則, S, T: 非正則とすると, AB は正則, AS, SA, ST は非正則)

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 $\neg$ (b) $\Rightarrow \neg$ (a)

$\operatorname{rank} A \neq n$ すなわち $\operatorname{rank} A < n$ とする.
正則な P で簡約階段形 PA にする. PA の n 行目は ${}^{t}\mathbf{0}$. 加藤 線形代数 例題 1 より PA は正則でない.
(背理法) A が正則なら, 積 PA も正則なので矛盾する.
A は正則でない.

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (b)⇒ (c)

$\operatorname{rank} A = n$ なので, ある正則な $P = Q_s \cdots Q_1$ で簡約階段化したとき, $PA = E$.
$A = P^{-1} = (Q_s \cdots Q_1)^{-1} = Q_1^{-1} \cdots (Q_s)^{-1}$
これらはすべて基本行列 加藤 線形代数 定理 2-1(p.84).

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (c)$\Rightarrow$ (a)

基本行列は正則行列
正則行列の積はまた正則行列.