第 3 章 行列の構造 (逆行列)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L19(2022-06-15 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-14 Tue 19:54 JST hig"

今日の目標

- 行基本変形を用いて逆行列を求められる

L18-Q1

Quiz 解答: 基本行列の逆行列

$P_i(c^{-1}) = [d_{\ell p}], P_i(c)P_i(c^{-1}) = [f_{kp}]$ とする．$f_{kp} = \delta_{kp}$ を言えば，$P_i(c)P_i(c^{-1}) = E$，すなわち，$P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$ を言ったことになる．

$$\begin{aligned}
f_{kp} &= \sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell} \cdot d_{\ell p} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \delta_{k\ell}(1+(c-1)\delta_{ik}) \cdot \delta_{\ell p}(1+(c-1)\delta_{i\ell}) \\
&= \qquad (1+(c-1)\delta_{ik}) \cdot \delta_{kp}(1+(c^{-1}-1)\delta_{ik}) \\
&= \delta_{kp}(1+(c-1)\delta_{ik}+(c^{-1}-1)\delta_{ik}+(c-1)(c^{-1}-1)\delta_{ik}\delta_{ik}) \\
&= \delta_{kp}(1+0).
\end{aligned}$$

最後の等号では，$\delta_{ik}\delta_{ik} = \delta_{ik}$ を使った ($i = k$ かどうかに応じて，$1^2 = 1$ または $0^2 = 0$)．

ここまで来たよ

◆逆行列と基本変形 加藤 線形代数 p,.88

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) より
任意の n 次正則行列 A は, n 次基本行列のある積として次のように書ける…「E に $Q_s, \dots, Q_1$ の順に基本操作を適用すると A」

$$A = Q_1 \cdots Q_s E. \quad (*)$$

これは次のようにも書ける.

$$Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1} A = E. \quad (**)$$

両辺の逆行列をとって次のように書ける…「E に $Q_1^{-1}, \dots, Q_s^{-1}$ の順に基本操作 (逆操作) を適用すると A^{-1}」

$$A^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1} E. \quad (***)$$

$Q = Q_1 \cdots Q_s, Q^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$.

$E \xrightarrow{Q} A \quad (*)$

↕逆変形

$E \xrightarrow{Q^{-1}} A^{-1} \quad (***)$

$A \xrightarrow{Q^{-1}} E \quad (**)$

↕同じ行基本変形

$E \xrightarrow{Q^{-1}} A^{-1} \quad (***)$

逆行列の求め方 加藤 線形代数 p.89

任意の正則行列 A について,
A に施して E を作る (簡約階段形にする) 行基本変形を
E に施すと, A^{-1} ができる.

https://bit.ly/rrmatrix

ここまで来たよ

18 第 3 章 行列の構造 (正則行列)

19 第 3 章 行列の構造 (逆行列)

- ◆逆行列と基本変形
- ◆逆行列の求め方

◆逆行列の求め方 加藤 線形代数 p.89

逆行列を求める筆算

n 次の正方行列 A が与えられたとき, $n \times (2n)$ 行列 $[A|E]$ を考え, 掃き出し法で (行基本変形で) 簡約階段形にする.

$$[A|E] \to \cdots \to [E|B]$$

となったなら, A は正則で, $B = A^{-1}$ が求める逆行列.

加藤 線形代数 例題 1(p.92)

「正則であるかどうか調べ, 正則であればその逆行列を求めよ」

「逆行列の求めた方」で, $[A|E]$ を簡約階段形に変形する. $[E|B]$ に到達したなら逆行列が得られる. $[E|B]$ に到達しないなら (階数が不足するなら), 正則でない. 副産物として $\operatorname{rank} A (< n)$ が求まる.

`https://bit.ly/rrmatrix`

mobius K3.3.10 加藤 線形代数 練習 3(p.92), 章末問題 4(p.94)

掃き出し法の復習

線形代数☆演習 I(2022)LL15 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

- (1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
  すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
- (2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持っていってピボットにする
- (3) 持っていった非零成分を R2 ($[1] \times 1/c$) で 1 にする
- (4) R3 $[j] \times a + [i]$ で, ブロックの $i(\geq)2$ 行目を零にする
- (10) R3 $[1] \times a + [i]$ で, ブロックのその列の上側を零にする
- (5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う
- (12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

加藤 線形代数 例題 1(p.57), 練習 7(p.58), 章末問題 1,5,6(pp.72,73) mobius K2.2.50