第 4 章 行列式 (置換)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L20(2022-06-17 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-17 Sun 06:51 JST hig"

今日の目標

- 置換を説明できる
- 置換の符号を, 差積, 転倒数の計算から求められる

ここまで来たよ

写像と変換の復習

加藤 線形代数 pp.6,8,10,12,191–

◆置換

定義 (置換)

有限集合 $\{1,\ldots,n\}$ 上の変換 加藤 線形代数 p.6 で, 1 対 1 加藤 線形代数 p.16, 上への写像 加藤 線形代数 p.15 になっているものを置換 (permutation) という.

加藤 線形代数 例 1(p.98) $X=\{1,\ldots,5\}$ の置換 $\sigma : X \to X$.

$$\sigma(x)=\begin{cases} 3 & (x=1) \\ 5 & (x=2) \\ 2 & (x=3) \\ 4 & (x=4) \\ 1 & (x=5) \end{cases}$$

別の書き方 $\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 5 \mapsto 1.$
この σ に対して $\sigma(2)=5.$

置換の略記方法 (角括弧は行列, 丸括弧は置換)

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

- これらの数は,「番目」でなく, その数 $\in X$ を表す.
  $X = \{A, B, C, D, E\}$ でも同じことができる.
- 1 対 1 の変換であることから, 下の行には同じ数がちょうど 1 回ずつでてくる.
- 置換を 1 個決めるごとに, 下の行に順列 (例)35241 がでてくる, という気分の記号.
- 置換は, n 個から n 個を取り出す順列の個数 ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個ある.
- グレッグ イーガン, 順列都市 Permutation city, 早川書房, 1999.

ここまで来たよ

◆置換の合成

σ, τ: 置換.
合成変換 $\tau(\sigma(x)) = (\tau \circ \sigma)(x)$ のことを, 置換の合成 $\tau\sigma$ と書く.
「積」のように見えるが, $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

加藤 線形代数 例題 1(p.100), 練習 2(p.100)

◆単位置換と逆置換|1. 置換

定義

恒等変換 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を単位置換という.

任意の置換 σ に対して $\sigma e = e\sigma = \sigma$.

定義

σ の逆変換 $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を σ の逆置換という.

$(\tau\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\tau^{-1}$. (合成変換の逆変換の性質の反映) mobius K4.1.10
なんか行列の積に似てる…
「X の置換全体は X の対称群 (symmetric group) S_n という群 (group) をなす. n 次正則行列全体は群 GL(n) をなす」 代数入門 (3 年)

略記 $\underbrace{\sigma\cdots\sigma}_{k} = \sigma^k$. $(k \geq 0)$, $\underbrace{\sigma^{-1}\cdots\sigma^{-1}}_{k} = \sigma^{-k}$. $(k \geq 0)$.

ここまで来たよ

◆置換の符号

加藤 線形代数 p.102

定義 (差積)

n 変数 $(x_1, \ldots, x_n)$ の差積とは, 多項式

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

$n \times n$ 個のペア (i, j) のうち, $n(n-1)/2$ 個の積.

加藤 線形代数 例 4(p.103)

定義 (総積の記号)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Σ for Sum, Π(π の大文字) for Product.

加藤 線形代数 定義 1-1(p.105)

定義 (置換の符号)

$\{1, \ldots, n\}$ の置換 σ について

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \frac{D(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})}{D(x_1, \cdots, x_n)} = \pm 1$$

を σ の符号 (signature) という.

ここで定義した符号とは, 整数 ± 1 のことで, ‘正’ ,‘負’ という語ではない.

加藤 線形代数 p.105

定義 (偶置換奇置換)

- 符号が $+1$ の置換を偶置換,
- 符号が -1 の置換を奇置換という.

置換の符号の性質

加藤 線形代数 定理 1-1(p.104), 系 1-1(p.105)

定理 (置換の符号の合成公式)

置換 σ, τ, 単位置換 e に対して,

- $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}\sigma \times \operatorname{sgn}\tau$
- $\operatorname{sgn}\ e = 1.$
- $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}\sigma.$

「sgn は置換の群から乗法群 $\{\pm 1\}$ への群準同形写像」 代数入門

置換の符号の別の特徴づけ

加藤 線形代数 例題 3(p.104)

定義

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 σ に対して,
X の要素の $n(n-1)/2$ 個のペア (i, j) $(i < j)$ のうち, $\sigma(i) > \sigma(j)$ であるものの個数を,
σ の**転倒数**という.

命題

$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{\sigma \text{ の転倒数}}$.

加藤 線形代数 練習 5(p.104)

mobius K4.1.20, K4.1.30

ここまで来たよ

◆偶置換と奇置換|1. 置換

加藤 線形代数 定理 1-2(p.106)

定理

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換を考える $(n \geq 2)$.

- 置換全体は ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個ある.
- 偶置換は $n!/2$ 個ある.
- 奇置換は $n!/2$ 個ある.

証明 τ: 奇置換を固定する.
置換全体の集合 S_n の上の変換 $\sigma \mapsto \tau\sigma$ を考える.

ここまで来たよ

巡回置換と互換

定義 (巡回置換)

$1 \le k \le n$ とする．次の形の置換を巡回置換 (cyclic permutation) という．

$$\begin{aligned}
\sigma(x_{i_1}) &= x_{i_2} \sigma(x_{i_2}) = && x_{i_3} \\
&\vdots \\
\sigma(x_{i_{k-1}}) &= x_{i_k} \\
\sigma(x_{i_k}) &= x_{i_1}, \sigma(x) = && x \quad (\text{他の } x \text{ つまり} x \neq x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})
\end{aligned}$$

例 $n = 5, k = 3$ で $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

略記 上の巡回置換を $(4\ 1\ 5) = (1\ 5\ 4) = (5\ 4\ 1)$ と略記する．

定義 (互換)

長さ 2 の巡回置換 $(x_1\ x_2)$ を **互換 (transposition)** という.

$$\sigma(x_{i_1}) = x_{i_2}$$
$$\sigma(x_{i_2}) = x_{i_1} \sigma(x) = \qquad x \quad (x \neq x_{i_1}, x_{i_2})$$

加藤 線形代数 例 5(p.105)

事実

互換は奇置換

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 5)$

置換の符号の別の特徴づけ

加藤 線形代数 なし

定理

置換 σ が,
k 個の互換 τ_i $(i = 1, \ldots, k)$ の積 $\sigma = \tau_k \ldots \tau_1$ として書けるとき,

$$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^k$$

業界用語: 特徴づけ=characterization, defining property. 定義と同値で, こちらを定義にしてもよいような性質のこと.

こちらを定義にする場合, 先に well-definedness を確かめる必要がある

- すべての置換は, 互換の合成として書ける
- 互換の個数の偶奇は, 互換の合成の表し方によって変わらない

前半部分 (書けること)

事実

すべての置換は巡回置換の合成で書ける. 加藤 線形代数 章末問題 1(p.133)

事実

長さ k の巡回置換は, $k-1$ 個の互換の合成で書ける.

加藤 線形代数 例 6, 練習 6(p.106)

よって, 巡回置換は, 長さ k が偶数なら奇置換, 奇数なら偶置換.

事実

すべての置換は互換の合成で書ける. 加藤 線形代数 章末問題 2(p.133)