第 4 章 行列式 (行列式)

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L21(2022-06-22 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-22 Wed 14:17 JST hig"

今日の目標

- 行列式の定義を説明できる
- 定義に従って, 2,3 次の行列式を計算できる
- 行列式の交代性を説明できる
- 2 次の行列式と平行四辺形の面積の関係を説明できる

ここまで来たよ

置換の符号の性質

加藤 線形代数 定理 1-1(p.104), 系 1-1(p.105)

定理 1 (置換の符号の合成公式)

置換 σ, τ, 単位置換 e に対して,

- $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}\,\sigma \times \mathrm{sgn}\,\tau \quad$ (*)
- $\mathrm{sgn}\ \ e = 1.$
- $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}\,\sigma.$

「sgn は置換の群から乗法群 $\{\pm 1\}$ への群準同形写像」　代数入門

(*) の証明

$$D(x_{\tau(1)}, \ldots) = \mathrm{sgn}\,\tau \times D(x_1, \ldots)$$

の分子分母にはそれぞれ $x_1, \ldots, x_n$ が現れている. 約分すると消えるのだから, どんな文字でもいい. $x_1, \ldots, x_n$ を, $y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}$ に置き換える. sgn の定義より,

$$右辺 = \mathrm{sgn}(\tau) \times D(y_{\sigma(1)}, \ldots) = \mathrm{sgn}(\tau) \times \mathrm{sgn}(\sigma) D(y_1, \ldots)$$

$$左辺 = D(y_{\sigma(\tau(1))}, \ldots) = \mathrm{sgn}(\sigma\tau) \times D(y_1, \ldots)$$

◆偶置換と奇置換|1. 置換

加藤 線形代数 定理 1-2(p.106)

定理 2

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換を考える $(n \geq 2)$.

- 置換全体は ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個ある.
- 偶置換は $n!/2$ 個ある.
- 奇置換は $n!/2$ 個ある.

証明 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots \end{pmatrix}$ を固定する. $\tau^{-1} = \tau$. $\operatorname{sgn} \tau = -1$.
X の置換全体の集合 S_n の上の変換 $\sigma \mapsto \tau\sigma$ を考えると, これは 1 対 1.

ここまで来たよ

巡回置換と互換

定義 3 (巡回置換)

$1 \leq k \leq n$ とする. 次の形の置換を巡回置換 (cyclic permutation) という.

$$
\begin{aligned}
\sigma(i_1) =& i_2, \\
\sigma(i_2) =& i_3, \\
& \vdots \\
\sigma(i_{k-1}) =& i_k \\
\sigma(i_k) =& i_1, \\
\sigma(i) =& i \quad (\text{他の } i \text{ つまり} i \neq i_1, \dots, i_k)
\end{aligned}
$$

例 $n = 5, k = 3$ で $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

略記 上の巡回置換を $(4\ 1\ 5) = (1\ 5\ 4) = (5\ 4\ 1)$ と略記する.

定義 4 (互換)

長さ 2 の巡回置換 $(i_1\ i_2)$ $(i_1 \neq i_2)$ を 互換 (transposition) という.

$$\begin{aligned} \sigma(i_1) &= i_2, \\ \sigma(i_2) &= i_1, \\ \sigma(i) &= i \quad (i \neq i_1, i_2) \end{aligned}$$

加藤 線形代数 例 5(p.105)

事実 5

互換は奇置換

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 5)$

置換の符号の別の特徴づけ

加藤 線形代数 なし

定理 6

置換 σ が,
k 個の互換 τ_i $(i = 1, \ldots, k)$ の積 $\sigma = \tau_k \ldots \tau_1$ として書けるとき,

$$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^k$$

業界用語: 特徴づけ=characterization, defining property. 定義と同値で，こちらを定義にしてもよいような性質のこと.

こちらを定義にする場合, 先に well-definedness を確かめる必要がある

- すべての置換は, 互換の合成として書ける
- 互換の個数の偶奇は, 互換の合成の表し方によって変わらない

前半部分 (書けること)

事実 7

すべての置換は巡回置換の合成で書ける. 加藤 線形代数 章末問題 1(p.133)

事実 8

長さ k の巡回置換は, $k-1$ 個の互換の合成で書ける.

加藤 線形代数 例 6, 練習 6(p.106)

よって, 巡回置換は, 長さ k が偶数なら奇置換, 奇数なら偶置換.

事実 9

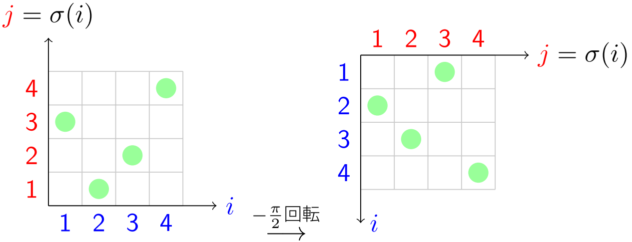
すべての置換は互換の合成で書ける. 加藤 線形代数 章末問題 2(p.133)

ここまで来たよ

互換のグラフ

$n = 4, X = \{1, 2, 3, 4\}$.
例として X の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
左が $j = \sigma(i)$ の ‘グラフ’

- 変換であること: 各列に●が 1 個ある
- ‘1 対 1 かつ上への’ 変換であること: 各行に●が 1 個ある



あれっ 4 次の正方行列
みたい…
$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 σ は, n 次の正方行列の, 特定パターンの n 個の成分●
$(i, \sigma(i))$ $(i = 1, \ldots, n)$ の選択を指定する.
問: σ^{-1} のグラフは?

◆行列式の定義

加藤 線形代数 定義 2-1(p.107)

定義 10 (行列式)

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列に対して,

$$\det A = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\text{置換}●)●\text{成分の積} = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

を n の行列式 (determinant) という. $\sum$ は $n!$ 個の置換全ての和.

邪悪な記法

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}.$$

$|\quad|$ は絶対値, $|\quad|$ は行列式. $\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right| = |-2| = 2.$

行列式の直接計算の例

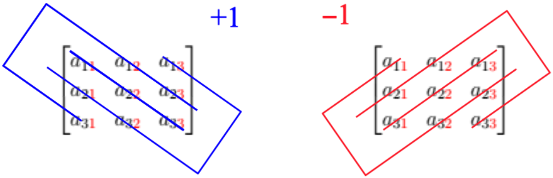
加藤 線形代数 例 1–4(pp.107-109)

例 1 $n=2$ 加藤 線形代数 練習 1(p.108), 章末問題 3(1)(p.133) 加藤 線形代数 p.34 $2!=2$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = \Delta$$

例 2 $n=3$ 加藤 線形代数 練習 2(p.109), 章末問題 3(2)(p.133) $3!=6$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$



サラスの公式

加藤 線形代数 図 2(p.108)

mobius K4.2.10

例 3 $n=4$ $n=4$ ではサラスの公式は正しくない．正しくは $4!=24$ 項の和だがサラスの公式を誤適用すると 8 項になってしまう．定義をそのまま使うしかない．

例 4 対角行列, 単位行列．和は $\sigma=\mathrm{id}$(恒等置換) のみ．

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdots \cdots \cdot a_{nn}$$

特に $\det(E)=1$.

ここまで来たよ

◆行列式の行多重線形性

加藤 線形代数 定理 2-1(p.110)

定理 11 (行多重線形性)

A: n 次正方行列, $\boldsymbol{a}_i$ 行ベクトル, ある行 i に対して, $\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c}$.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{b}+\ell\boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = k\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \ell\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

$f(x)$ の線形性 (linearity): $f(kx+\ell y) = kf(x) + \ell f(y)$ が成り立つこと.
多重線形性 (multi-linearity): $f(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \det {}^t[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ のどの引数についても線形性を持つこと.
証明 $i = 1$ で一般性を失わない.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(kb_{\sigma(1)} + \ell c_{\sigma(1)})a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= k\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \ell\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) c_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \text{右辺}. \end{aligned}$$

◆行列式の交代性

加藤 線形代数 定理 2-2(p.111)

定理 12 (行列式の行交代性)

A: $n \times n$ 行列,
$\boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$: A の第 i 行ベクトル

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = (-1) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化 (特殊な場合 $\tau =$ 互換, として上を含む) 加藤 線形代数 定理 2-3(p.112)

定理 13 (行列式の行の置換のもとでの変換)

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化のほうの証明

左辺の $\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$ を変形して, 右辺の形に持っていく.

あえて, $\sigma(i) = \sigma\tau^{-1}\tau(i)$ と書く.

$$\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma\tau^{-1}\tau(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma\tau^{-1}\tau(n)}$$

行番号 $\tau(i) = 1, 2, 3,$ で積の順をソート

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma\tau^{-1}(n)}$$

合成置換 $\rho = \sigma\tau^{-1}$ とおく. σ の和を ρ の和で置き換え

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho\tau) a_{1\rho} \cdots a_{n\rho}$$

定理 1-1 より

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\rho} \cdots a_{n\rho} = \text{右辺}.$$

ここまで来たよ

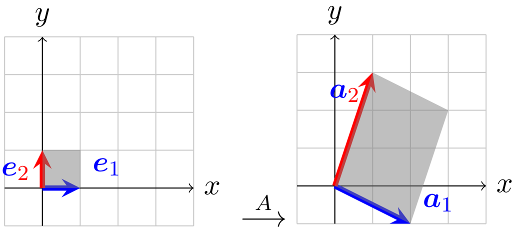
2 次の行列式と面積・拡大率

加藤 線形代数 なし 2 次正方行列 A, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A の表す線形変換 f は, $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}'$ に写す. 例: $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に写る.
$\mathbb{R}^2$ の図の正方形は, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形に写る.



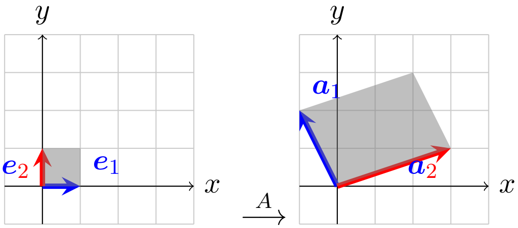
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は?

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_1| \times |\boldsymbol{a}_2| \sin\theta =& \sqrt{|\boldsymbol{a}_1|^2 \times |\boldsymbol{a}_2|^2(1 - \cos^2\theta)} \\ =& \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})^2} \\ =& |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = |\det A| = 7.\end{aligned}$$

f の拡大率は $\det A = 7$.

平行四辺形が裏返しになるとき

行入れ替え $\leftrightarrow$ x', y' 軸入れ替え.
例: $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.



f の拡大率は $\det A = -7$.
平行四辺形が裏返しに写っているとき ($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の時計回りの順番が逆になっているとき), $\det A < 0$.
平行四辺形の面積は $|\det A| = 7$.

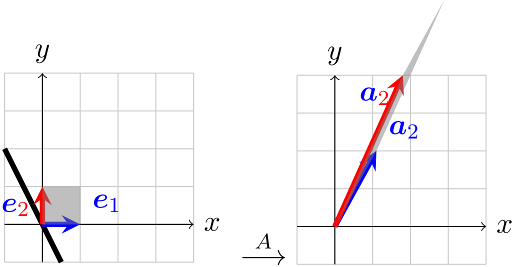
$\boxed{\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \text{ は, } \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \text{ を 2 辺とする平行四辺形の符号付き面積}}$

$\boxed{\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \text{ は, } \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \text{ の符号つき面積拡大率}}$

mobius K4.2.30

写すと平行四辺形がつぶれるとき

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0.$$



面積=拡大率=0.