第 4 章 行列式 (行列式 2)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L22(2022-06-24 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-24 Fri 11:41 JST hig"

今日の目標

- 行列式の列多重線形性, 交代性, 図形的意味を説明できる
- 転置の行列式, 行列式の積公式を利用できる
- 行列式を, 定義と性質を使って計算できる

ここまで来たよ

◆多重線線形性と交代性 (前回の復習)

加藤 線形代数 定理 2-1(p.110)

定理 1 (行多重線形性)

A: n 次正方行列, $\boldsymbol{a}_i$ 行ベクトル, ある行 i に対して, $\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c}$.

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{b}+\ell\boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \ell\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 定理 2-3(p.112)

定理 2 (行列式の行の置換のもとでの変換)

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

行列式がゼロになる場合

加藤 線形代数 定理 2-1,2,3(pp.110-112) の系

系 3

A: n 次の正方行列
$\boldsymbol{a}_i$: i 行目の行ベクトル

- $(\exists i$ s.t.$\boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}) \Rightarrow \det A = 0.$
- $(\exists i, j (i \neq j), c \in \mathbb{R}$ s.t.$\boldsymbol{a}_i = c\boldsymbol{a}_j) \Rightarrow \det A = 0.$

s.t.=such that
$\exists x$s.t.条件：条件を満たすような x が存在する.

- 置換に関する和で書いた定義から
- $c = 0, 1$ はやさしい．多重線形性で $c = 1$ に帰着.

ここまでに知ったことを使った行列式の計算例

L22-Q1

基本行列の行列式

基本行列 加藤 線形代数 p.75 の行列式を求めよう.

1. $\det(P_{ij})$?
2. $\det(P_i(c))$?
3. $\det(P_{ij}(a))$?

加藤 線形代数 定理 3-2(p.121)

mobius K4.2.70, チーム課題, , mobius K4.2.90(未公開)

◆転置行列の行列式

加藤 線形代数 定理 2-4(p.113)

定理 4 (転置行列の行列式)

$\det({}^{\mathrm{t}}A) = \det(A)$.

証明

$$
\begin{aligned}
\det({}^{\mathrm{t}}A) &= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&\overset{\text{積の並び替え}}{=} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&\overset{\tau = \sigma^{-1} \text{と定義}}{=} \sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau^{-1}) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&\overset{\text{逆置換の符号}}{=} \sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= \det(A).
\end{aligned}
$$

列多重線形性と列交代性

加藤 線形代数 定理 2-5, 2-6(p.115)

定理 5

「列についても行と同様に多重線形性, 交代性 加藤 線形代数 定理 2-1,2,3 がなりたつ」

加藤 線形代数 練習 5(p.116)

定理 6

「列についても行と同様な $\det A = 0$ の十分条件 加藤 線形代数 系 2-1(p.112) がある」

行列式にとって, 行と列は同じ性質を持つ

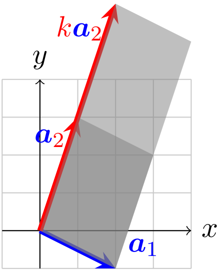
行列式の性質の図形的説明 加藤 線形代数 なし

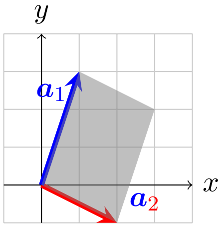
列多重線形性 $k\boldsymbol{a}_2$, $k=2$

列交代性 $\boldsymbol{a}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{a}_2$

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{bmatrix} 2 & k\cdot 1 \\ -1 & k\cdot 3 \end{bmatrix} \\
=&k \times \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\
=&k \times 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\
=&(-1) \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\
=&-7
\end{aligned}
$$





$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\det(A)\det(B)$ ： 正方形をまず B, 次に A で写したときの, 累積した拡大率

$\det(AB)$: 正方形を AB でいちどに写したときの拡大率

もちろん等しい.

◆行列式の積公式

加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) mobius K4.2.90(未公開)

定理 7 (行列式の積公式)

$\det(AB) = \det(A)\det(B).$

証明

ブロック分けでの積 加藤 線形代数 p.27

$$\det(AB) \overset{\text{ブロック分け}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{ブロックの計算}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{1n}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{1 行目の行多重線形性}}{=} \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ a_{21}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{2n}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{2\text{ 行目の行多重線形性}}{=} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ \boldsymbol{b}_{i_2} \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1+\cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{3,\cdots,n\text{ 行目の行多重線形性}}{=\cdots=} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ \boldsymbol{b}_{i_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{i_n} \end{bmatrix}$$

(*) n^n 個の和のうち, 行が重複して行列式が 0 にならない条件から, 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ に対応する $n!$ 個だけ残る.

$$\overset{(*)}{=} \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{\sigma(1)} \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{行交代性}}{=} \left(\sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma)\right) \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{定義}}{=} \det(A)\det(B).$$

加藤 線形代数 例 4(p.109)

補題 8

$\det(E) = 1.$

加藤 線形代数 系 2-2(p.118) 加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) の系

系 9 (逆行列の行列式)

A が正則行列なら

$\det(A) \neq 0.$

$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

「det は, n 次の正則行列全体から, 乗法群 $\mathbb{R}_{\neq 0}$ への群準同型写像である」

ここまで来たよ

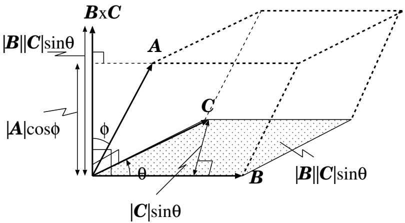
復習

外積 線形代数☆演習 I(2022)L02 加藤 線形代数 p.265-266

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{array}{ccc}\boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1\\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2\\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3\\ & a_1 & b_1\\ & a_2 & b_2\end{array}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$$

スカラー 3 重積 線形代数☆演習 I(2022)L03

外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はベクトル.
ということは, 内積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ はスカラー (1 個の実数) になる.
図形的に考えると, 絶対値 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする $\boxed{\text{平行六面体の体積}}$.
右の図は $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}$ を描いている.



平行六面体の体積とスカラー 3 重積と行列式の図形的意味

加藤 線形代数 なし

3 次の行列式は, スカラー 3 重積, すなわち, 平行六面体の符号付き体積に等しい

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det[\boldsymbol{abc}]$$

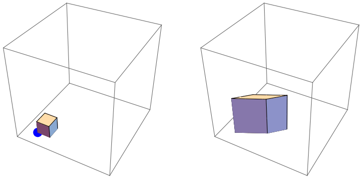
実は, n 次正方行列の行列式 $\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ は $\mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を辺とする n 次元の '平行 $2n$ 面体' の符号付き体積.

行列式は行列の「度量の」大きさのようなもの

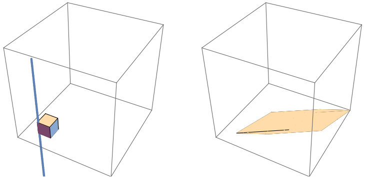
3 次の行列式は体積拡大率と思える

$A = [\boldsymbol{abc}]$ の表す 1 次変換で,
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{a}$ に, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{b}$ に, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{c}$ に写る.
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を 3 辺とする立方体は, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体,
またはそれをつぶした平面, 直線, 点に写る.
行列式 $\det A$ は 1 次変換の拡大率 (裏返しなら負).

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
$\det A = 9$



$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\det A = 0$ (平面につぶれる場合)



L22-Q2

Quiz(体積拡大率)

ベクトル

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

を 3 辺とする平行六面体を, 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ の表す線形変換で写した. 写した先の平行六面体の体積を求めよう.

L22-Q3

Quiz(体積拡大率)

ベクトル

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

を 3 辺とする平行六面体を, 行列 $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ の表す線形変換で写した.

写す前後の平行六面体の体積の比を求めよう.

mobius K4.2.50