# 第 4 章 行列式の計算

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L23(2022-06-29 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-01 Fri 11:15 JST hig"

今日の目標

- 行列式を, 行基本変形で計算できる

L22-Q1 結果は 加藤 線形代数 定理 3-2(p.121) 参照.

L22-Q2

Quiz 解答: 体積拡大率

$\det A \times \det[\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11 = 660.$

L22-Q3

Quiz 解答: 体積拡大率

$\det[\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3] = 51.$ よって, $1 : 51.$

# 大注意

$A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n], B$ : $n$ 次正方行列, $c \in \mathbb{R}$.
多重線形性は

- $\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, c\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n] = c \det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$
  だけど, $\det(cA) \neq c \det(A)$
- $\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n] =$
  $\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{b}, \cdots \boldsymbol{a}_n] + \det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{c}, \cdots \boldsymbol{a}_n]$
  だけど, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

次は正しい.

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- $\det(cA) = c^n \det(A)$.

# ここまで来たよ

22 第 4 章 行列式 (行列式 2)

23 第 4 章 行列式の計算
- ◆還元定理|3. 行列式の計算

# ◆還元定理

還元=reduction, 還元する=小さいものに帰着させる?

加藤 線形代数 定理 3-1(p.119)

## 定理 1

$(1,(n-1)) \times (1,(n-1))$ にブロック分けされた行列 に対して

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & * \cdots * \\ \mathbf{0} & A' \end{bmatrix} = a_{11} \det(A').$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots 0 \\ * & A' \end{bmatrix} = a_{11} \det(A').$$

## 証明

$\det(A) = \det({}^{\mathrm{t}}A)$ より後者だけ証明すれば十分.

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$a_{1i}$ $a_{11}$ 以外 0 なので, は $\sigma(1) = 1$ でないものは成分の積が 0 になる.
$\{2, \cdots, n\}$ の置換を $\sigma'$ と書き

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma'} \mathrm{sgn}(\sigma') a_{11} a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \\ &= a_{11} \sum_{\sigma'} \mathrm{sgn}(\sigma') a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} = \qquad a_{11} \times \det(A'). \end{aligned}$$

加藤 線形代数 練習 2(2)(p.102)

加藤 線形代数 系 3-1(p.120)

## 系 2 (上三角行列・下三角行列の行列式)

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次の上三角行列のとき,

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

証明 ($n$ に関する数学的帰納法)

- $n = 1$ のとき, $\det A = a_{11}$.
- $n = k$ **のとき正しいと仮定する.**
  $n = k + 1$ のとき, 還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(1) より, $\det A = a_{11} \det A'$.
  $A'$ は $k$ 次の上三角行列なので, 帰納法の過程より, $\det A' = \prod_{i=2}^{k+1} a_{ii}$.
  よって, $\det A = \prod_{i=1}^{k+1} a_{ii}$. **すなわち,** $n = k + 1$ **のときも正しい.**

下三角行列についても同様 下三角は上三角の転置だから 加藤 線形代数 定理 2-4(p.113).

# 基本行列と行列式

加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) $A, B$: $n$ 次の正方行列に対して,
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) 任意の正則行列 $A$ は基本行列 $P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ の積で $A = PP'P'' \cdots$ と書ける (どう書けるかは, 逆行列を求める過程=簡約階段形にする過程でわかる).

加藤 線形代数 定理 3-2(p.121) 基本行列の行列式は計算済.

**定理 3 (基本行列の行列式)**

1. $\det(P_{ij}) = -1$.
2. $\det(P_i(c)) = c$.
3. $\det(P_{ij}(a)) = 1$.

$\rightsquigarrow$ $\det A = \det P \times \det P' \times \cdots$ で求まるじゃん?

# 基本行列をかける ＝ 基本操作する

加藤 線形代数 定理 3-3(p.122)

## 定理 4 (基本操作と行列式)

$A$ に次の基本操作をして得た行列を $B$ とする.

$A \stackrel{R,C}{\to} B$.

| | 基本操作 | 行列式 | |
|---|---|---|---|
| 行基本操作 R1 | $[i] \leftrightarrow [j]$ | $\det A =$ | $(-1) \times \det B$ |
| 行基本操作 R2 | $[i] \times c$ | $\det A =$ | $\frac{1}{c} \times \det B$ |
| 行基本操作 R3 | $[j] \times a + [i]$ | $\det A =$ | $\det B$ |
| 列基本操作 C1 | $[i列] \leftrightarrow [j列]$ | $\det B =$ | $(-1) \times \det B$ |
| 列基本操作 C2 | $[i列] \times c$ | $\det A =$ | $\frac{1}{c} \times \det B$ |
| 列基本操作 C3 | $[j列] \times a + [i列]$ | $\det A =$ | $\det B$ |

# 教科書お奨めの自由な計算手順

行列式を = でつないで計算していく．定数倍がでたときはそれを記す．

加藤 線形代数 p.123

- R1–3, C1–3, 還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119) を「いい感じの順序で使って」上下三角行列や, $3 \times 3$ 以下に持っていく
- 上下三角行列になったら 加藤 線形代数 系 3-1(p.120) , $3 \times 3$ 以下になったら 加藤 線形代数 例 1,2(pp.107-108) で計算して終了
- 途中で行列式ゼロ条件 加藤 線形代数 系 2-1(p.112), 練習 5(p.116) が満たされたら即強制終了

加藤 線形代数 例題 1, 練習 5(p.123) mobius K4.2.10

# あいまいさのないアルゴリズム

入力: $n$ 次正方行列 $A$

- (逆行列を求めるのと同じ) 行基本操作 (次のページ) で簡約階段形にしていく
  - ただし, 主成分 ($0$ ではない) は $1$ にしてもしなくてもよい
  - ただし, 主成分の上側の成分はゼロにしなくてよい
  - 主列でない列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
  - 0 ばかりの行, 列, 定数倍の行, 列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
- 上三角行列になった段階で, 係数かける対角成分の積を出力
- 残りの右下ブロックが $2 \times 2$, $3 \times 3$ になったら, 公式と還元定理を使ってもよい

`https://bit.ly/rrmatrix`

還元定理は,「右下ブロックだけ見る」ことに相当

# 復習: 掃き出し法の概要

加藤 線形代数 pp.54–56 | 線形代数☆演習 I(2022)L15

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

## 掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ

(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 $c$ を持っていってピボットにする

(3) 持っていった非零成分を R2 ($[1] \times 1/c$) で 1 にする

(4) R3 $[j] \times a + [i]$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目を零にする

(10) R3 $[1] \times a + [i]$ で, ブロックのその列の上側を零にする

(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う

(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

大注意 1 個の矢印に複数の操作: 逐次適用 (略記) はいいけど,
同時適用は間違った結果になる

## 簡約階段形や逆行列を求める，と，行列を求める，との違い

| 求めるもの | 簡約階段形, 方程式の解, 逆行列 | 行列式の値 |
|---|---|---|
| 対象 | 行列 $\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$, $\left[\begin{array}{cc|cc} \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 1 \end{array}\right]$ | 行列式 $\det \begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$ |
| つなぐもの | $\to$ | $=$ |
| 許される操作 | R のみ (*) | R と C |
| ゴール | 簡約階段形 | (上) 三角行列 |
| 併用できる操作 | | 還元，展開 (来週)，サラスの公式 $(3 \times 3)$, 行列式が 0 になる十分条件 |

(*) 簡約階段形から進んで標準形 加藤 線形代数 定理 1-2(p.81) を求めるときは C も使います.

線形代数 I を通過した人は, 区別して完璧に実行できるべき手順.
レポート方式の Trial で対比して確認します.