第 5 章 ベクトル空間

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L25(2022-07-06 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-06 Wed 07:20 JST hig"

今日の目標

- ベクトル空間の部分空間である/でないことを証明できる
- 同次連立 1 次方程式の解空間を求められる

ここまで来たよ

◆ベクトル空間

加藤 線形代数 pp.136-143 ベクトル空間 (vector space) という一般の概念, 定義があり, これまで自然に扱ってきた 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ はその典型例になっている. 線形代数☆演習 II(2022)L??

教科書は一般的のベクトル空間の定義 加藤 線形代数 定義 5-1-1(p.141) に基づいて話をしているが,

授業では $\mathbb{R}^n$ という具体例に限定して説明する. 教科書は

$V = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}$ と思って利用しよう.

◆部分空間

定義 (5-1-2 部分空間 加藤 線形代数 p.144)

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ の部分集合 $W \subset V$ について, 次の条件が満たされるとき, W は V の部分空間 (subspace), 部分ベクトル空間 (vector subspace) であるという.

S1 $\mathbf{0} \in W$
S2 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W \Rightarrow \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W$ 'W は和で閉じている'
S3 $\boldsymbol{v} \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\boldsymbol{v} \in W$ 'W はスカラー倍で閉じている'

例になっている, 例になっていない証明 加藤 線形代数 例 1, 例題 1, 練習 3(p.145)

L25-Q1

ベクトル空間の部分空間

$V = \mathbb{R}^2$.

1. $W_1 = \{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mid x + 2y = 0\}$ は V の部分空間か.
2. $W_2 = \{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mid x + 2y = 2\}$ は V の部分空間か.
3. $W_3 = \{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mid x = 0 \text{または} y = 0\}$ は V の部分空間か.

方針

- であることの証明: A ならば B(A⇒B) を証明するには, A を仮定して B(S1,S2,S3 のすべて) を言う.
- でないことの証明: S1 を満たさないことを言うか, 反例 (S2 または S3 を満たさない $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の例) を挙げる.

定理 (5-1-1 同次連立 1 次方程式の解空間 加藤 線形代数 p.146)

$V = \mathbb{R}^n$
A: $m \times n$ 行列のとき,
A を係数行列とする同次連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \qquad (**)$$

の解 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in V$ の全体

$$W = \{\boldsymbol{v} | A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\} \subset V$$

は V の部分空間をなす. この部分空間 W を (**) の解空間という.

同次連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.69

証明

ここまで来たよ

◆同次連立 1 次方程式 線形代数☆演習 I(2022)L16 加藤 線形代数 p.69

定義 (同次連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.69)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ が

1. 同次連立 1 次方程式 ⇔ $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
2. 非同次連立 1 次方程式 ⇔ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

同次=斉次=homogeneous(等質)=次数が同じ (今の場合, 各項が 1 次)

命題

同次方程式はつねに自明 (trivial) な解 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を持つ

定義 (非自明な解)

同次方程式の $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を非自明 (non-trivial) な解という

定理 (2-3-3 同次連立 1 次方程式の非自明な解の存在 加藤 線形代数 p.69)

A を $m \times n$ 行列とする.
同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ (**) は

1. $\mathrm{rank}\, A = n \Rightarrow$ (**) は自明な解しか持たない
2. $\mathrm{rank}\, A < n \Rightarrow$ (**) は非自明な解を持つ

- $\mathbf{0}$ は自明な解.
  - 同次連立 1 次方程式の解空間の直線や平面は原点を通る.
- 自明な解しか持たないなら, 解は一意に定まる.
  - 解空間が 1 点の場合のこと.
- 非自明な解が存在するなら, 無限個の解が存在する.
  - 解空間が直線や平面のときが, 非自明な解があるとき.

加藤 線形代数 例題 4, 練習 5(p.70), 章末問題 3(p.72) mobius K2.3.50

例題

L25-Q2

同次連立 1 次方程式の解空間

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

であるとき, A を簡約階段形に変形して, $\mathrm{rank}\, A$ を求めよう. 非自明な解はあるか? 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ の解を求め, 解空間を $V = \mathbb{R}^2$ に描こう.

L25-Q3

同次連立 1 次方程式の解空間

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

であるとき, A を簡約階段形に変形して, $\operatorname{rank} A$ を求めよう. 非自明な解はあるか? 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ の解を求め, 解空間を $V = \mathbb{R}^3$ に描こう.

L25-Q4

同次連立 1 次方程式の解空間

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -5 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$

であるとき, A を簡約階段形に変形して, $\mathrm{rank}\, A$ を求めよう. 非自明な解はあるか? 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ の解を求め, 解空間を $V = \mathbb{R}^2$ に描こう.

L25-Q5

同次連立 1 次方程式の解空間

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

であるとき, A を簡約階段形に変形して, $\operatorname{rank} A$ を求めよう. 非自明な解はあるか? 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ の解を求め, 解空間を $V = \mathbb{R}^3$ に描こう.

L25-Q6

同次連立 1 次方程式の解空間

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

であるとき, A を簡約階段形に変形して, $\operatorname{rank} A$ を求めよう. 非自明な解はあるか? 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ の解を求め, 解空間を $V = \mathbb{R}^2$ に描こう.

ここまで来たよ

24 4.4 行列式の展開

25 第 5 章 ベクトル空間
- 1. 部分空間
- (復習) ◆同次連立 1 次方程式
- 2. 1 次独立と 1 次従属

◆1 次結合

定義 (1 次結合 加藤 線形代数 p.152)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$,
$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ のとき,
$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ を「$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合 (linear combination)」という.

系 (5-2-1 1 次結合からなる部分空間 加藤 線形代数 p.153)

$V = \mathbb{R}^m$.

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のとき,

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合全体の集合

$W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ は, V の部分空間.

証明 加藤 線形代数 定理 2-1(p.152)

定義 (5-2-1 生成された部分空間 加藤 線形代数 p.153)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$,
部分空間 $W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ のとき,

- $W = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ と書く. 初めて出てきた記号
- W を, $v_1, \cdots, v_n$ で生成された (generated) 部分空間という.
- W を, $v_1, \cdots, v_n$ で張られた (spanned) 部分空間という.
- ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ は W を生成する (generate), 張る (span) という
- ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ は W の生成系 (generating set, spanning set) であるという.

$V = \mathbb{R}^m$ の部分空間は必ず生成系を持つ (有限生成である=上の定義よりせ生成系は有限個のベクトルからなることから)

加藤 線形代数 例 1,2, 練習問題 1,2,3(pp.153–154)

例

原点を通る, パラメタ表示された直線や平面 線形代数☆演習 I(2022)L04 は, $V=\mathbb{R}^n$ の部分空間.

$\{\boldsymbol{a}t | t\in\mathbb{R}\}$

$\{\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}s | s,t\in\mathbb{R}\}$

原点を通る $\Leftrightarrow$ パラメタ表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{c}$ で $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.