5.2 1 次独立 1 次従属|第 5 章 ベクトル空間

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L27(2022-07-13 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-13 Wed 20:20 JST hig"

今日の目標

- ベクトルを, 与えられたベクトルの 1 次結合で書ける
- 同次連立 1 次方程式の解空間の生成系を求められる

ここまで来たよ

◆1 次結合

定義 (1 次結合 加藤 線形代数 p.152)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$,
$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ のとき,
$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ を「$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合 (linear combination)」という.

1 次結合=線形結合

L27-Q1

Quiz(1 次結合)

$V = \mathbb{R}^2$ のベクトルを考える.

1. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ の, 係数 $a_1 = 3, a_2 = 5$ による 1 次結合 $\boldsymbol{w}$ を求めよう.
2. 上で求めたベクトルを $\boldsymbol{w}$ を, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 次結合として書いたときの係数を求めよう.

L27-Q2

Quiz(1 次結合としての表現)

ベクトル $\boldsymbol{w} = \left[\begin{smallmatrix} 10 \\ 11 \end{smallmatrix}\right] \in V = \mathbb{R}^2$ を, ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ の線形結合として書こう (=係数を見つけよう)

1 次結合として書くときの係数の求め方

1 次結合として書くときの係数

$V=\mathbb{R}^m$: ベクトル空間,
与えられたベクトル $\boldsymbol{w}\in V$ が, 与えられたベクトルたち $\boldsymbol{v}_i\in V$ の 1 次結合で書けるかを判定し, 書けるなら係数 $a_i\in\mathbb{R}$ を知るには,
a_i を未知数として非同次連立 1 次方程式を立てて, 解く 加藤 線形代数 例題 1(p.62).
解なしなら書けない.

L27-Q3

Quiz(1 次結合としての表現)

ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^3$

1. ベクトル $\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ は, これらのベクトルの 1 次結合で書けるか. 書けるなら係数を見つけよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$ は, これらのベクトルの 1 次結合で書けるか. 書けるなら係数を見つけよう.

mobius K5.2.10 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

L27-Q4

Quiz(1 次結合としての表現)

ベクトル $\boldsymbol{w} = \left[\begin{smallmatrix}2\\5\end{smallmatrix}\right] \in V = \mathbb{R}^2$ を, ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{v}_3 = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$, の線形結合として書こう (=係数を見つけよう).

系 (5-2-1 1 次結合からなる部分空間 加藤 線形代数 p.153)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のとき,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合全体の集合

$$W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

は, V の部分空間.

証明 加藤 線形代数 定理 2-1(p.152)

定義 (5-2-1 生成された部分空間 加藤 線形代数 p.153)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$,
部分空間 $W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ のとき,

- $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ と書く. (初めて出てきた記号)
- W を, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ で生成された (generated) 部分空間という.
- W を, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ で張られた (spanned) 部分空間という.
- ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は W を生成する (generate), 張る (span) という
- ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は W の生成系 (generating set, spanning set) であるという.

$V = \mathbb{R}^m$ の部分空間は必ず生成系を持つ (有限生成である=上の定義より生成系は有限個のベクトルからなることから)

加藤 線形代数 例 1,2, 練習問題 1,2,3(pp.153–154)

例

原点を通る, パラメタ表示された直線や平面 線形代数☆演習 I(2022)L04 は, $V = \mathbb{R}^m$ の部分空間.

$\{\boldsymbol{a}t | t \in \mathbb{R}\}$

$\{\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s | s, t \in \mathbb{R}\}$

原点を通る $\Leftrightarrow$ パラメタ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ で $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

L27-Q5

Quiz(部分空間の生成系)

$V = \mathbb{R}^3$ の部分集合 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| x_2 = 0 \right\}$ を考える.

1. W が V の部分空間であることを示そう.
2. W の生成系をみつけよう.

解空間の生成系の求め方

解空間の生成系

$V=\mathbb{R}^m$: ベクトル空間 のとき,
与えられた n 元同次連立 1 次方程式の解空間 $W\subset V$ の生成系 (の 1 つ) を得るには,
同次連立 1 次方程式として解いて 加藤 線形代数 例題 1(p.62), 任意定数にかかるベクトルを集めてくればいい.
自明な解しかないとき, $W=\{\mathbf{0}\}$ なので生成系は空集合.

L27-Q6

Quiz(同次連立 1 次方程式の解空間の生成系)

未知数 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix}$ に対する同次連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 10x_5 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

の解空間は $V = \mathbb{R}^5$ の部分空間である.
W の生成系をみつけよう.

mobius K5.2.30 $\boxed{\text{加藤 線形代数 例題 1(p.62)}}$

◆1 次独立

定義 (1 次関係式 加藤 線形代数 p.155)

$V = \mathbb{R}^m$,

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のとき,

- $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ という, 1 次結合=0 の式を 1 次関係,1 次関係式という.
- $a_1 = \cdots = a_n = 0$ である 1 次関係式を自明な (trivial)1 次関係という
- $a_1, \cdots, a_n$ のうち少なくとも 1 つが 0 でない 1 次関係式を非自明な (non-trivial)1 次関係式という.

1 次関係式は, 自明, 非自明のいずれか一方になる.

L27-Q7

Quiz(1 次関係の発見)

ベクトル $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right] \in V = \mathbb{R}^2$ の 1 次関係式を (すべて) 見つけよう.

ベクトルの 1 次関係式の見つけ方

ベクトルの 1 次関係式の見つけ方

$\mathbf{0}$ を, 与えられたベクトルの 1 次結合として書く.

L27-Q8

Quiz(1 次関係式の発見)

ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^4$ の 1 次関係式を (すべて) 見つけよう.

加藤 線形代数 例題 1(p.62)