5.2 1 次独立 1 次従属|第 5 章 ベクトル空間

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L28(2022-07-15 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-15 Fri 17:12 JST hig"

今日の目標

- ベクトルの組について, 1 次独立/1 次従属 を判定できる

L27-Q1

Quiz 解答:1 次結合

1. $\boldsymbol{w} = 3\left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right] + 5\left[\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}6\\18\end{smallmatrix}\right]$.
2. $\boldsymbol{w} = 6\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] + 18\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$.

L27-Q2

Quiz 解答:1 次結合としての表現

係数 a_1, a_2 に関するる連立 1 次方程式

$$a_1\left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right] + a_2\left[\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}10\\11\end{smallmatrix}\right]$$

を解いて, $a_1 = 5, a_2 = 2$.

L27-Q3

Quiz 解答:1 次結合としての表現

1 次結合で書けるとして, 係数を $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ とする.

1.

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

係数行列を $A = [\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ と書くと (非同次) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w}_1$ の解を見つけるという問題になる.
拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ を簡約階段化すると $\tilde{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
よって, $a_1 = 4, a_2 = -1$.

2. 拡大係数行列 $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ を簡約階段化すると $\tilde{B} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
解なし. 1 次結合としては書けない.

3. 任意定数が残る場合もある. このときは, 1 次結合として書く方法が複数個 (無限個) ある.

L27-Q4

Quiz 解答:1 次結合としての表現

係数を a_1, a_2, a_3 とすると, 係数を定める連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. これはすでに簡約階段形で, 解は,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}, \text{任意定数})$$

よって, 係数は $a_1 = 2 - c, a_2 = 5 - c, a_3 = c$ $(c \in \mathbb{R}, \text{任意定数})$.

L27-Q5

Quiz 解答: 部分空間の生成系

1. 直接に定義の S1,S2,S3 をチェック, または, $x_3 = 0$ は同次連立 1 次方程式なので, 教科書 (加藤) 定理 5-1-1(p.146) から.
2. $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

ここまで来たよ

27 数式処理システム

28 5.2 1 次独立 1 次従属|第 5 章 ベクトル空間
- 2. 1 次独立と 1 次従属

◆1 次独立

定義 (1 次関係式 加藤 線形代数 p.155)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のとき,

- $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ という, 1 次結合=0 の式を, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ の 1 次関係,1 次関係式という.
- $a_1 = \cdots = a_n = 0$ である 1 次関係式を自明な (trivial)1 次関係という
- $a_1, \cdots, a_n$ のうち少なくとも 1 つが 0 でない 1 次関係式を非自明な (non-trivial)1 次関係という.

1 次関係は, 自明, 非自明のいずれか一方になる.
1 次関係とは, $\boldsymbol{0}$ を与えられたベクトル達の 1 次結合として表したもの.
mobius K5.2.50

L28-Q1

Quiz(1 次関係)

1. $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 次関係式を求めよう.
2. $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ の 1 次関係式を求めよう.

定義 (5-2-2 1 次独立・1 次従属 加藤 線形代数 p.155)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ に

- 非自明な 1 次関係が存在しないとき, $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は 1 次独立 (linearly independent) であるという.
- 非自明な 1 次関係が存在するとき (そういううまい $a_1, \ldots, a_n$ がとれるとき), $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は 1 次従属 (linearly dependent) であるという.

depend = 依存する, in- dependent = 依存しない = 独立な
$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が 1 次独立とは,
$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0.$
直観的説明

- 1 次従属なら, 組のうちのどれかのベクトルは, 組の他のベクトルの 1 次結合で書ける ($n \geq 2$). 1 次独立ならそういうことはない.
- 1 次独立とは「ベクトルの組が, いろんなベクトルを 1 次結合で表すにあたって, 無駄がない」こと.

定理 (5-2-2 数ベクトルの 1 次独立性 加藤 線形代数 p.157, 系 5-2-2 前半 加藤 線形代数 p.158)

$V = \mathbb{R}^n$,
r 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ に対して
$n \times r$ 行列 $A = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ \ \boldsymbol{v}_r]$ を考える.

- $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ が 1 次独立
  - $\Leftrightarrow$ 1 次関係式は自明なもののみ
  - $\Leftrightarrow$ 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解は自明な解 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ のみ.
  - $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = r$
- $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ が 1 次従属
  - $\Leftrightarrow$ 非自明な 1 次関係式がある
  - $\Leftrightarrow$ 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が非自明な解 $\boldsymbol{v}$ を持つ
  - $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A < r$

加藤 線形代数 例題 2(p.158), 練習 6,7(p.159) mobius K5.2.70

L28-Q2

Quiz(1 次独立・1 次従属)

次の $\mathbb{R}^4$ のベクトルの組は 1 次独立かどうか, 答えよう.

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$

L28-Q3

Quiz(20220714-05-linear-independence)

次の $\mathbb{R}^4$ のベクトルの組は 1 次独立か, 答えよう.

1. $\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\-3\\-9\end{bmatrix}\right\}$

$r=n$ のとき

系 (5-2-2 後半=5-2-2 前半の特殊化の系) 加藤 線形代数 p.157, 加藤 線形代数 定理 5-2-2(p.157)

$V=\mathbb{R}^n$,
$r=n$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ に対して
$n\times n$ 行列 (n 次の正方行列) $A=[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ \ \boldsymbol{v}_n]$ を考える.
次は同値

- $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ が 1 次独立
- $\operatorname{rank} A=n$
- A は正則
- $\det(A)\neq 0$

復習

定理 (4-4-4 正則行列の特徴づけ $\boxed{\text{加藤 線形代数 p.130}}$)

A: n 次の正方行列 のとき
次は同値

(a) A は正則
(b) $\operatorname{rank} A = n$「フルランク」
(c) $\det(A) \neq 0$

L28-Q4

Quiz(1 次独立・1 次従属)

次の $\mathbb{R}^2$ のベクトルの組は 1 次独立かどうか, 答えよう.

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
3. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
4. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}\right\}$
5. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right\}$
6. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$