5.3 基底と次元|第 5 章 ベクトル空間

樋口さぶろお　hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L29(2022-07-20 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-20 Wed 07:32 JST hig"

今日の目標

- 1 次独立/1 次従属 をイメージできる
- ベクトルの組が基底かどうか判定できる

L28-Q1
Quiz 解答:1 次関係

1. 係数行列 $A = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3]$, 1 次結合の係数 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ とすると, 1 次関係式は, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ になる.
行基本変形で A を簡約階段化すると, $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ よって, 解は
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. 自明な 1 次関係式 $0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ のみが成立する.
2. 係数行列 $A = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3]$, 1 次結合の係数 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ とすると, 1 次関係式は, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ になる.
行基本変形で A を簡約階段化すると, $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ よって, 解は
$a_1 = -3c, a_2 = -c, a_3 = c$ $(c \in \mathbb{R}$, 任意定数$)$.
非自明な 1 次関係式 $-3c\boldsymbol{v}_1 - c\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \quad (c \in \mathbb{R})$ がある.
(定数 $(\neq 0)$ 倍したものがまた非自明な 1 次関係式になるのは明らかなので, (きれいになるたとえば $c = -1$ を代入した式だけを見せて)

「非自明な 1 次関係式 $3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ がある」とだけ言うことが多い)

L28-Q2

Quiz 解答:1 次独立・1 次従属

1. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする.
   $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ $(a_i \in \mathbb{R})$ とおくと, 係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ に対して, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ が成立する. 行基本変形で A を簡約階段化すると, $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   よって, 解は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. 自明な 1 次関係式 $0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ のみが成立するので, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は 1 次独立である.

2. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ とする.
   $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ $(a_i \in \mathbb{R})$ とおくと, 係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ に対して, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ が成立する. 行基本変形で A を簡約階段化すると, $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ よって, 解は
   $a_1 = -3c, a_2 = -c, a_3 = c$ $(c \in \mathbb{R},$ 任意定数$)$.
   非自明な 1 次関係式 $3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ があるので, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は 1 次従属である.

L28-Q3

Quiz 解答:1 次独立・1 次従属

1. 自明な 1 次関係しかないので 1 次独立.
2. 非自明な 1 次関係 $2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ があるので 1 次従属.

ここまで来たよ

◆1 次独立性と 1 次結合

定理 (5-2-3 1 次独立性と 1 次結合 加藤 線形代数 p.160)

$V=\mathbb{R}^m$,
V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ が 1 次独立,
ならば
「$\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書ける, ならば, その書き方は一意的」

「書き方は一意的」$\Leftrightarrow$「書く書き方は 1 通り」$\Leftrightarrow$ 係数 a_i が 1 通りに定まる.

証明

「一意的」の証明方針: 2 つの書き方を変数でおいて, 実は等しくなる, という.

定理 (5-2-3 の逆 加藤 線形代数 練習 10(p.160))

$V=\mathbb{R}^m$,
V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ ~~が 1 次独立~~,
「$\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書ける, ならば その書き方は一意的」
ならば,
$\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ は 1 次独立.

1 次独立の特徴づけ

ベクトルの組が 1 次独立であるとは, 別のベクトルが組の 1 次結合で書けるなら一意的, であること.

定理 (5-2-4 1 次結合による表現可能性 加藤 線形代数 p.161)

$V = \mathbb{R}^m$
V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が 1 次独立
$\boldsymbol{w} \in V$ のとき,

1. $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}\}$ が 1 次従属 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書ける
2. 対偶「1 次結合で書けないベクトルを追加しても, 組は 1 次独立のまま」

証明

L29-Q1

Quiz(1 次独立・1 次従属)

次の $\mathbb{R}^2$ のベクトルの組は 1 次独立かどうか, 答えよう.

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
3. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
4. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}\right\}$
5. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right\}$
6. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$

加藤 線形代数 定理 2-2(p.157), 系 2-2(p.157) mobius K5.2.70

ここまで来たよ

◆基底

定義 (5-3-1 基底 加藤 線形代数 p.162)

$W \subset V = \mathbb{R}^m$ 部分空間, ベクトル空間,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in W$, のとき,

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は W の基底 (basis, 複数形 bases)
$\Leftrightarrow$

(B1) $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$
(B2) $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は 1 次独立

加藤 線形代数 は W でなく一般のベクトル空間 V としているが, ここでは $\mathbb{R}^m$ の部分空間に限定.
まずは $W = V = \mathbb{R}^m$ をイメージしよう.
加藤 線形代数 定義 2-1(p.153) (B1)$\Leftrightarrow$「$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は W を生成する」
$\Leftrightarrow$「任意の $\boldsymbol{w} \in W$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書ける」

例 (5-1 $\boxed{\text{加藤 線形代数 p.162}}$)

$(W = V = \mathbb{R}^n)$

基本ベクトルすべての組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は

$\mathbb{R}^n$ の基底 ($\mathbb{R}^n$ の標準基底とよばれる)

(B1)
(B2)

命題 (加藤 線形代数 なし)

$W = V = \mathbb{R}^m$ のとき,
ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が W を生成する $\Leftrightarrow \mathrm{rank}[\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \boldsymbol{v}_n] = m$.

証明

生成するとは, 任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対して $[\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w}$ が解を持つこと. 加藤 線形代数 系 3-1(p.67) などから.

例標準基底や, それにベクトルを追加したものは, $\mathbb{R}^m$ を生成する.

命題 (加藤 線形代数 なし)

$(W = V = \mathbb{R}^n)$
$\mathbb{R}^n$ の 1 次独立なベクトルの組で, n 個からなるもの $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底.

系 (加藤 線形代数 なし)

$(W = V = \mathbb{R}^n)$
$\mathbb{R}^n$ の n 個からなるベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ について,
$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底 $\Leftrightarrow \det[\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n] \neq 0$.

L29-Q2

Quiz(基底)

次の $\mathbb{R}^2$ のベクトルの組は $\mathbb{R}^2$ を生成するか, $\mathbb{R}^2$ の基底か, 答えよう.

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
3. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
4. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}\right\}$
5. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right\}$
6. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$

mobius K5.3.10

1 次独立 対 生成 対 基底

$\mathbb{R}^m$ のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$.
$A = [\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n]$.

	1 次独立	$\mathbb{R}^m$ の基底	$\mathbb{R}^m$ を生成
定義	加藤 線形代数 定義 2-2(p.155)	加藤 線形代数 定義 3-1(p.162)	加藤 線形代数 定義 2-1(p.153)
判定条件	$\operatorname{rank} A = n$	$\operatorname{rank} A = n = m$	$\operatorname{rank} A = m$
特徴付け	ベクトル $\boldsymbol{w}$ が組の 1 次結合で書けるなら一意的	任意のベクトル $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ が組の 1 次結合で一意的に書ける	任意のベクトル $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ が組の 1 次結合で書ける
成立に有利 (必要条件的)	n 小	$n = m$	n 大

ここまで来たよ

Wolfram Alpha での行列の計算 I

https://www.wolframalpha.com/examples/Matrices.html

https://www.wolframalpha.com

行列

$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$

```
{{1,2},{3,4}}
{5,6}
```

Wolfram Alpha では変数代入できない (電卓的) ので毎回入力してください.

行列と行列, 行列とベクトルの積はピリオド

$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$

```
{{1,2},{3,4}} . {{5,6},{7,8}}
{{1,2},{3,4}} . {5,6}
```

Wolfram Alpha での行列の計算 II

行列のべき乗, 逆行列, 行列式

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^5$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$

$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
{{1,2},{3,4}}^5
Inverse[{{1,2},{3,4}}]
Rank[{{1,2},{3,4}}]
Det[{{1,2},{3,4}}]
```

行簡約階段形 ReducedRowEchelonForm

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

```
RREF[{{1,2},{2,4}}]
```