基底の変換

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L30(2022-07-27 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-27 Wed 07:55 JST hig"

今日の目標

- 1 つのベクトルを, 2 組の基底でそれぞれ 1 次結合として書いたときの係数を, 互いに変換できる

L29-Q1
Quiz 解答:1 次独立・1 次従属

1. 1 次独立
2. 1 次従属
3. 1 次独立
4. 1 次従属
5. 1 次従属
6. 1 次従属

L29-Q2
Quiz 解答: 基底

1. 生成しない
2. 生成しない, 1 次従属
3. 基底
4. 生成しない, 1 次従属
5. 1 次従属
6. 1 次従属

ここまで来たよ

◆行列式の余因子展開

定理 (3-4-1 余因子展開 加藤 線形代数 p.125)

$A=[a_{ij}]$: n 次の正方行列
$\tilde{a}_{ij}$: A の (i,j) 余因子 のとき,

- $\forall i \quad \det(A)=\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{i\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j \quad \det(A)=\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{\ell j}$. ($j$ 列目における余因子展開)

(i,j) 小行列式にかけられる符号=(i,j) 余因子に含まれる符号 $\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$

どこかの 1 行, またはどこかの列を選んで展開する. n 項の和になる.
第 3 行についての展開 (., $\bullet$ はつめて, $n-1$ 次の行列式を計算)

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = +31\begin{vmatrix} \cdot & 12 & 13 & 14 \\ \cdot & 22 & 23 & 24 \\ \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} -32\begin{vmatrix} 11 & \cdot & 13 & 14 \\ 21 & \cdot & 23 & 24 \\ \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ 31 & \cdot & 43 & 44 \end{vmatrix} +33\begin{vmatrix} 11 & 12 & \cdot & 14 \\ 21 & 22 & \cdot & 24 \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ 31 & 32 & \cdot & 44 \end{vmatrix} -34\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & \cdot \\ 21 & 22 & 23 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\ 31 & 32 & 43 & \cdot \end{vmatrix}$$

第 2 列についての展開

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ 21 & \cdot & 23 & 24 \\ 31 & \cdot & 33 & 34 \\ 41 & \cdot & 43 & 44 \end{vmatrix} +22\begin{vmatrix} 11 & \cdot & 13 & 14 \\ \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ 31 & \cdot & 33 & 34 \\ 41 & \cdot & 43 & 44 \end{vmatrix} -32\begin{vmatrix} 11 & \cdot & 13 & 14 \\ 21 & \cdot & 23 & 24 \\ \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ 41 & \cdot & 43 & 44 \end{vmatrix} +42\begin{vmatrix} 11 & \cdot & 13 & 14 \\ 21 & \cdot & 23 & 24 \\ 31 & \cdot & 33 & 34 \\ \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

ここまで来たよ

ベクトルの成分と標準基底の 1 次結合

$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $\boldsymbol{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$.
ベクトル $\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right] = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$.

ベクトルの成分 = 標準基底の 1 次結合で書いたときの係数

他の基底の 1 次結合の係数はどういう意味?

L30-Q1

TA Prob and Sol: 基底の変換

$\mathbb{R}^2$ の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$,$\{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'\}$ を考える．ただし，

$$\boldsymbol{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{v}_1' = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2' = 7\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2$$

である．
ベクトル $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{w} = a_1'\boldsymbol{v}_1' + a_2'\boldsymbol{v}_2'$ と書くときの係数 $a_1', a_2' \in \mathbb{R}$ を求めよう．

略解

$$\boldsymbol{w} = \left[\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right] = a_1' \left[\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right] + a_2' \left[\begin{smallmatrix}7\\5\end{smallmatrix}\right]$$

を a_i' について解けばよい．

$$\left[\begin{smallmatrix}2&7\\3&5\end{smallmatrix}\right] \begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\end{bmatrix} = \left[\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right]$$

と書けるので, 両辺に左から逆行列 $\left[\begin{smallmatrix}2&7\\3&5\end{smallmatrix}\right]^{-1}$ をかけて,

$$\begin{bmatrix}a'_1\\a'_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2\cdot5-7\cdot3}\left[\begin{smallmatrix}5&-7\\-3&2\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{-11}\left[\begin{smallmatrix}-18\\2\end{smallmatrix}\right].$$

mobius 5.4.10
ここで現れた行列 $P=\left[\begin{smallmatrix}2&7\\3&5\end{smallmatrix}\right]$ を, $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$ から $\{\boldsymbol{v}'_1,\boldsymbol{v}'_2\}$ への基底変換行列という. 加藤 線形代数 p.230 線形代数☆演習 II(2022)L??

基底変換行列

この科目内では, 問題を解くのに下のことを使うのはやめておき, 上のように素直に連立方程式を解こう.
実は,

$$[\boldsymbol{v}_1' \ \boldsymbol{v}_2'] = [\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2]P$$

という関係も成立する.

$$\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{v}_1' \ \boldsymbol{v}_2'] \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2]PP^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

と書くと,

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

となったことも納得いく.
基底のベクトルを結ぶ行列と, 成分を結ぶ行列は, 互いに「逆 (行列)」

L30-Q2

Quiz(基底の変換)

$\mathbb{R}^2$ の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$,$\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ を考える．ただし，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_2,$$

である．
ベクトル $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{w} = a'_1\boldsymbol{v}'_1 + a'_2\boldsymbol{v}'_2$ と書くときの係数 $a'_1, a'_2 \in \mathbb{R}$ を求めよう．

基底の 1 次結合で書いたときの係数 = その基底で別の座標軸を定めたときのベクトルの成分

$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ 水平鉛直の座標軸
$\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ 斜面に平行垂直な座標軸

高校物理, 物理と微分方程式

L30-Q3

Quiz(基底の変換)

$\mathbb{R}^2$ の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$,$\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ を考える．ただし，

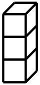
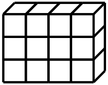
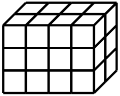
$$\boldsymbol{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{v}'_1 = 100\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}'_2 = \frac{1}{10}\boldsymbol{v}_2$$

である．
ベクトル $\boldsymbol{w} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{w} = a'_1\boldsymbol{v}'_1 + a'_2\boldsymbol{v}'_2$ と書くときの係数 $a'_i \in \mathbb{R}$ を a_i で表そう．

座標軸の「1 単位」が変わったので,「係数」も変わっている．
定規が cm から m,mm に変わったので, 目盛から読み取った値も変わっている．

ここまで来たよ

ベクトル・行列・テンソル

$\boldsymbol{x}=[x_i]$ 3次元縦ベクトル	$A=[a_{ij}]$ 3×4 行列	$T=[T_{ijk}]$ 3階の$3\times4\times2$ テンソル	$T=[T_{ijkh}]$ 4階の$3\times4\times 2\times 10$ テンソル
			?
ベクトル (vector) ‘行くもの’ 例: 部屋の明暗の時間変化データ. 3=時間の長さ.	行列 (matrix) ‘母体’ ‘土台’ ‘母型’ ‘活字’ 白黒グレースケール画像. 縦横 3x4 ドット.	テンソル (tensor) ‘張力’ RGB 画像	4階のテンソル RGB 動画

- 工学では, matrix といえば 縦横のあるもの, のイメージの方が強くなった
- ベクトルは 1 階のテンソル, 行列は 2 階のテンソル (まあ), 3 階以上はぜんぶテンソル
- どれもプログラム上では (多次元) 配列 array で表現される.

一般相対性理論のアインシュタイン方程式

$g_{\mu\nu}$ 計量テンソル, $R_{\mu\nu}$ リッチテンソル, $T_{\mu\nu}$ エネルギー運動量テンソル

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

今後使われる線形代数

- 1 年後期
  - 線形代数及び演習 II より抽象的に, より広い適用範囲
  - 微積分及び演習 II 2 変数関数 $y = f(x_1, x_2)$ の偏微分 $f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, テイラー展開, 置換積分
  - データ分析 表=行列に記録された数値データの扱い
- 2 年前期
  - 数値計算法及び実習 (の一部) 行列のアルゴリズムを自分でプログラムとして書こう
- 2 年後期
  - 多変量解析及び演習 'ベクトルの確率', 'その標本である行列'
- 3 年前期
  - 機械学習 I,II ニューラルネットワークのテンソルによる表現
- 3 年後期
  - 微分幾何入門曲面の曲がり具合を表現するリーマン曲率 (4 階) テンソル R^h_{kji}
- 大学院入試
  - 線形代数は必須科目

定期試験期間に行う任意参加試験

- 2022-08-03 水 9:15-10:15, 1-107
- 定期試験ではないので, 遅延や感染による配慮や追試はありません

出題計画

- Trial L01–L15 の出題計画をあわせたもの
- すべて持込不可
- 成績評価方法のお知らせ (2022-06-16) に始まる Teams 一般 ch のスレッドを参照.

他の科目の定期試験と, この任意参加試験に共通する注意

- 学生証必須.
- スマホ使用不可 (時計としても).
- (ふだん座席指定のない科目でも) 個人別座席指定 (されていることがあります).
- 遅刻は 20 分まで.

他の科目の定期試験にのみ該当する注意

- ふだんと教室が違うことがあります. ポータル My 定期試験時間割で確認.
- 考慮される理由 (履修要項) で欠席した場合, 証明文書を取得して直ちに教務課に連絡. 認められれば 8 月下旬に対面追試.